

CORRECTION

NOM - Prénom :

BCPST 12
Interrogation écrite n°13.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 13. SUJET A.

Vendredi 16 janvier 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Géométrie

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, quel est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y, z) vérifient :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0 \\ -2x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Réolvons le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ -2x - 3y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ y + 7z = -9 \end{cases} \quad L2 \leftarrow L2 + 2L1$$

le système est échelonné, de rang 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 + 11z \\ y = -9 - 7z \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} x = 14 + 11z \\ y = -9 - 7z \end{cases}} \right\} \text{ on pose } z = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 14 + 11t \\ y = -9 - 7t \\ z = t \end{cases}$$

On constate qu'on obtient une représentation paramétrique de la droite passant par $A(14, -9, 0)$, de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 - Polynômes

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant des polynômes suivants :

1. $P = (X^2 + 1)^n - X^{2n}$

2. $Q = (X + 1)^n + (X - 1)^n - 2X^n$

① En développant par la formule du binôme, on obtient :

$$(X^2 + 1)^n = (X^2)^n + n(X^2)^{n-1} + Q$$

où Q est un polynôme de degré $\leq 2n-4$

$$\text{Donc } P = X^{2n} + nX^{2n-2} + Q - X^{2n}$$

$$= nX^{2n-2} + \underbrace{Q}_{\deg Q \leq 2n-4}$$

$$\deg Q \leq 2n-4$$

On en déduit, puisque $n \neq 0$, que

$$\deg P = 2n-2$$

le coefficient dominant de P est n

de plus, $P(0) = 1$ donc le coefficient constant est 1.

② En développant par la formule du binôme, on obtient :

$$(X+1)^n = X^n + nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + Q_1, \text{ avec } Q_1 \text{ un polynôme de degré } \leq n-3$$

$$(X-1)^n = X^n - nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + Q_2, \text{ avec } Q_2 \text{ un polynôme de degré } \leq n-3$$

$$\text{D'où } Q = 2X^n + n(n-1)X^{n-2} + Q_1 + Q_2 - 2X^n$$

$$Q = n(n-1)X^{n-2} + \underbrace{Q_1 + Q_2}_{\substack{\text{polynôme de} \\ \text{degré } \leq n-3}}$$

On en déduit que Q est de degré $n-2$ (car $n(n-1) \neq 0$ puisque $n \geq 2$)
son coefficient dominant est $n(n-1)$

$$\text{de plus, } Q(0) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc le coefficient constant de Q est $\begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 13. SUJET B.

Vendredi 16 janvier 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Géométrie

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, quel est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y, z) vérifient :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 4 = 0 \\ -2x + 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ -2x + 3y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ -y + 7z = -9 \quad l_2 \leftarrow l_2 + 2l_1 \end{cases}$$

le système est échelonné, de rang 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 + 11z \\ y = 9 + 7z \end{cases} \quad \text{on pose } z = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 14 + 11t \\ y = 9 + 7t \\ z = t \end{cases}$$

on constate que c'est une représentation paramétrique de la droite passant par $A(14, 9, 0)$, et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$