

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 14. SUJET A.

Vendredi 30 janvier 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice - Une suite récurrente

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Étudier les variations de f . On pourra résumer les résultats dans un tableau de variations mais les limites ne sont pas attendues.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, à valeurs dans $[0, 2]$. On pourra démontrer ce résultat par récurrence.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite, notée ℓ , appartient à l'intervalle $[0, \frac{3}{2}]$.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Tracer sur le graphique (au verso) la courbe représentative de f , la droite d'équation $y = x$ et construire les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On indiquera les traits de construction.

① f est une fonction polynomiale donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x$. Donc le signe de $f'(x)$ est celui de x . D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f		$\searrow \quad \nearrow$	

(avec $f(0) = 0$)

② Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$P_n: "0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2"$$

$$(I) \quad u_0 = \frac{3}{2} \text{ donc } u_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8} \leq \frac{3}{2} \text{ car } \frac{3}{2} = \frac{12}{8}$$

Donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 2$, donc P_0 est vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que P_n soit vraie.

$$\text{Donc } 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$$

On applique f , croissante sur $\mathbb{R}_+$: $\underbrace{f(0)}_0 \leq \underbrace{f(u_{n+1})}_{u_{n+2}} \leq \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{f(2)}_2$

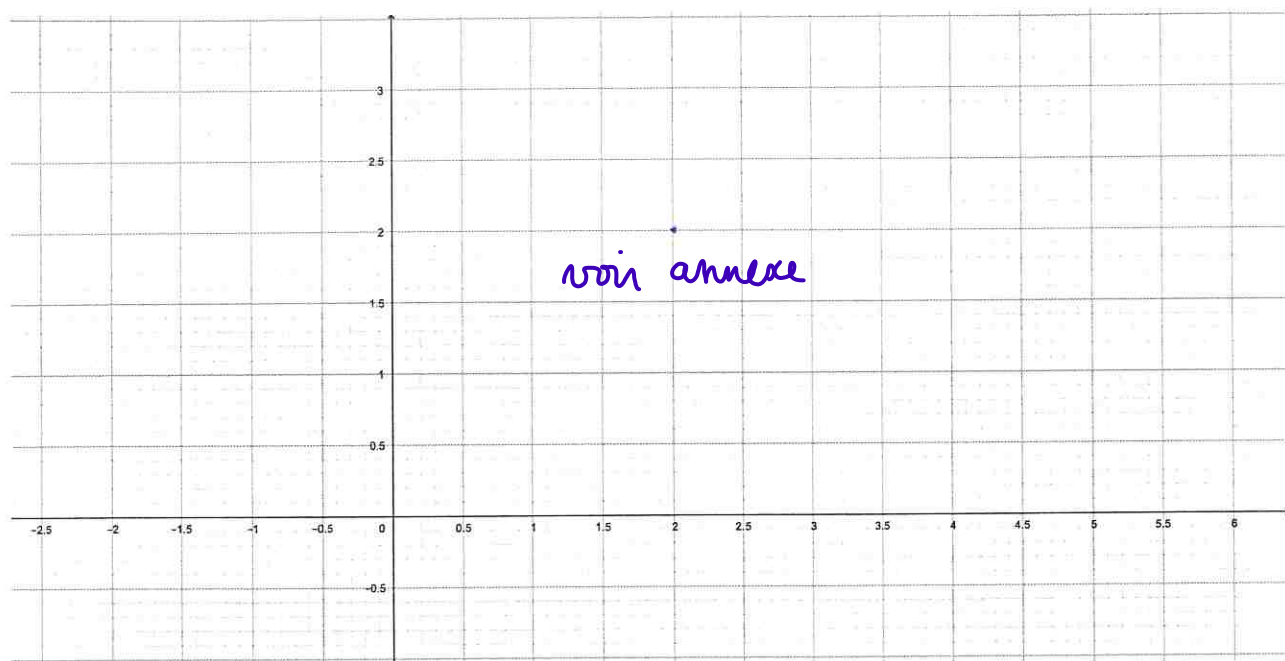
Donc $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 2$, donc P_{n+1} est vraie.

(C) Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$

Donc la suite (u_n) est décroissante, à valeurs dans $[0, 2]$.

③ La suite (u_n) est décroissante, minorée (par 0, d'après la question ②) donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

On note ℓ sa limite.



- $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$
 $\uparrow$
 d'après 9° ② $\nwarrow$ car $u_0 = \frac{3}{2}$ et la suite est décroissante.
 - (u_n) converge vers l
- donc par passage à la limite dans l'inégalité,
 $0 \leq l \leq \frac{3}{2}$

Ainsi, $l \in [0, \frac{3}{2}]$

- ④ (u_n) converge vers $l \in [0, \frac{3}{2}]$
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
 f est continue sur $[0, \frac{3}{2}]$
- donc d'après le théorème du point fixe, l est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned}
 \text{Or } f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = x \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \\
 &\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2
 \end{aligned}$$

Ainsi, $l = 0$ ou $l = 2$. Or nous avons montré que $l \in [0, \frac{3}{2}]$ et $2 \notin [0, \frac{3}{2}]$

On en déduit $\boxed{l = 0}$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 14. SUJET B.

Vendredi 30 janvier 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice - Une suite récurrente

On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{x^2}{3}$ et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

1. Étudier les variations de g . On pourra résumer les résultats dans un tableau de variations mais les limites ne sont pas attendues.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, à valeurs dans $[0, 3]$. On pourra démontrer ce résultat par récurrence.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite, notée l , appartient à l'intervalle $[0, \frac{3}{2}]$.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Tracer sur le graphique (au verso) la courbe représentative de g , la droite d'équation $y = x$ et construire les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On indiquera les traits de construction.

① g est une fonction polynomiale donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{2x}{3}$ donc le signe de $g'(x)$ est le signe de x . D'où le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	ϕ	+
g			

$$(g(0) = 0)$$

② Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$P_n: "0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3"$$

$$(I) \quad u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } u_1 = \frac{1}{3}u_0^2 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \leq \frac{3}{2}, \text{ donc } u_1 \leq u_0$$

de plus, $0 \leq \frac{3}{4} \leq \frac{3}{2} \leq 3$ donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$, donc P_0 est vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que P_n soit vraie.

$$\text{Donc } 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$$

$$\text{On applique } g, \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+ : \underbrace{g(0)}_0 \leq \underbrace{g(u_{n+1})}_{u_{n+2}} \leq \underbrace{g(u_n)}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{g(3)}_3$$

donc $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$, donc P_{n+1} est vraie.

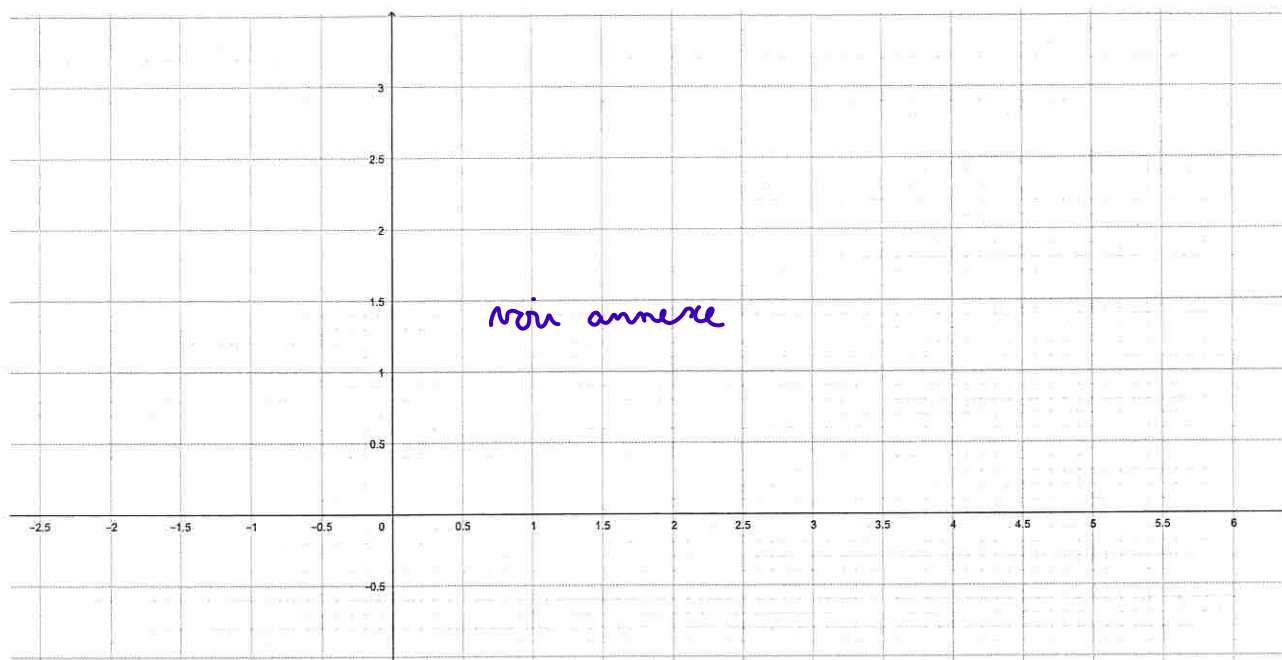
(C) Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$
 Donc la suite (u_n) est décroissante, à valeurs dans $[0, 3]$

③ La suite (u_n) est décroissante, minorée (par 0) donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. On note l sa limite.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \\ \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{3}{2} \end{array} \right\} \text{ donc par passage à la limite dans l'inégalité, } 0 \leq l \leq \frac{3}{2}$$

d'après q° ② $\uparrow$ car (u_n) est $\downarrow$ et $u_0 = \frac{3}{2}$ $\uparrow$

Ainsi, $l \in [0, \frac{3}{2}]$



$$⑨ \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \\ (u_n) \text{ converge vers } l \in [0, \frac{3}{2}] \\ g \text{ est continue sur } [0, \frac{3}{2}] \end{cases}$$

donc d'après le théorème du point fixe, l est solution de l'équation $g(x) = x$

$$\text{Or } g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=3$$

Ainsi, $l=0$ ou $l=3$

Or $l \in [0, \frac{3}{2}]$ (d'après $g^{\circ 3}$) et $3 \notin [0, \frac{3}{2}]$

On en déduit $l=0$

Construction des premiers termes de la suite u (sujet B)

