

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 18.

Semaine du lundi 9 février au vendredi 13 février 2026.

**Questions de cours :**

1. Toutes les questions de cours de la semaine 17.
2. Théorème de compositions des limites pour deux fonctions. Énoncé (sans démonstration). Application : déterminer la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $e^x \sin(e^{-x})$  et quand  $x$  tend vers 0 de  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ .
3. En admettant le théorème de composition des limites, énoncer et montrer les deux corollaires (deux moyens de montrer qu'une fonction n'a pas de limite en  $a$ ).
4. Montrer que  $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$  n'a pas de limite en 0. Tracer l'allure du graphe au voisinage de 0.
5. Théorème d'existence de limite par encadrement : énoncé (sans démonstration). Application : montrer que le produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0 en  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  est une fonction qui tend vers 0 en  $a$ .
6. Définition de fonctions équivalentes. Critère pratique (énoncé). Déterminer un équivalent de  $x \mapsto 3x^2 - 2x$ , en  $+\infty$  et en 0. Déterminer un équivalent en 0 de  $\sin(x)$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $e^x - 1$ ,  $\sqrt{1+x} - 1$ .
7. Énoncer les deux opérations que l'on n'a pas le droit de faire sur les fonctions équivalentes. Pour chacune d'elles, donner un exemple.
8. Propriété de substitution dans les équivalents. Énoncé et démonstration.

**Thème de la colle :**

**CALCULS**

**Exos-chronos** : donner 5 questions de la feuille "Course aux nombres" (au verso de ce document). Ces questions doivent être traitées très rapidement. Les étudiants doivent savoir expliquer oralement leurs résultats.

**SUITES RÉELLES**

**Tout le cours (voir semaine précédente)**

**LIMITES**

Définition et approche intuitive de la limite d'une fonction en un point, en  $+$  ou  $-\infty$ . Limites à droite et à gauche en un point. Unicité de la limite.

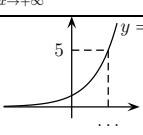
Opérations sur les limites. Croissances comparées.

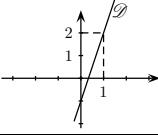
Limites et composées. Comment montrer, à l'aide de suites, qu'une fonction n'a pas de limite en  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

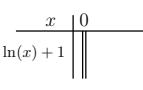
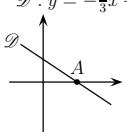
Limites et inégalités : passage à la limite dans une inégalité. Théorème d'existence de limite par encadrement. Théorème de comparaison.

Théorème de la limite monotone pour les fonctions (approche intuitive à l'aide de dessins).

Fonctions équivalentes : définitions, "critère pratique", propriétés. équivalents usuels en 0.

|     | ÉNONCÉ  | RÉPONSE   | JURY |
|-----|---|---|------|
| 1)  | $60 \times 0,7$   |   |      |
| 2)  | Écriture décimale de $\frac{21}{4}$   |   |      |
| 3)  | 15 % de 60  |   |      |
| 4)  | Résoudre $4 - 3x \leq 0$  |   |      |
| 5)  | Réduire au même dénominateur.<br>$\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$                |   |      |
| 6)  | $\text{Arg}(-3i)$   |   |      |
| 7)  | Résoudre $ x  = \sqrt{2}$   |   |      |
| 8)  | $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$<br>$x \mapsto \sin(2x)$<br>Compléter. | $f$ est ... -périodique.  |      |
| 9)  | $\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$   |   |      |
| 10) | Compléter.  | $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x+1} = \dots$                                  |      |
| 11) | Compléter.  |  |      |
| 12) | Compléter.  | $\lfloor \sqrt{45} \rfloor = \dots$   |      |
| 13) | Résoudre $(x-3)(2-x) > 0$   |   |      |

|     | ÉNONCÉ  | RÉPONSE   | JURY |
|-----|---|---|------|
| 14) | Compléter.                                    | $\sqrt{(3-\pi)^2} = \dots$  |      |
| 15) | $\ln(e^2) - \ln(\sqrt{e})$                    |   |      |
| 16) | $(\sqrt{3})^3 - 2\sqrt{3} =$                  |   |      |
| 17) | Forme algébrique de $2e^{i\frac{\pi}{3}}$     |   |      |
| 18) | Équation réduite de la droite $\mathcal{D}$ . |  |      |
| 19) | $30 \div 0,2$                                 |   |      |
| 20) | Forme algébrique de $\frac{1}{1-i}$           |   |      |
| 21) | Compléter.                                    | $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n = \dots$                 |      |
| 22) | Résoudre dans $\mathbb{C}$<br>$z^2 = -3$      |   |      |
| 22) | $f : x \mapsto e^{2-0,5x}$<br>Compléter.      | $f(4) = \dots$  |      |
| 23) | $ x-1  \leq 2 \Leftrightarrow$                | $x \in \dots$   |      |

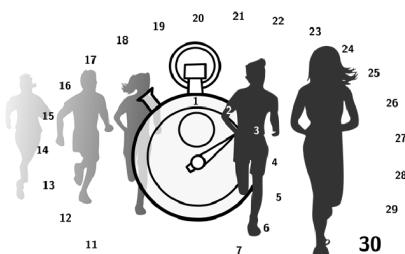
|     | ÉNONCÉ   | RÉPONSE   | JURY |
|-----|--|---|------|
| 24) | $f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$<br>$x \mapsto \ln^2(x)$  | $\forall x > 0$<br>$f'(x) = \dots$  |      |
| 25) | Signe de $\ln(x) + 1$ sur<br>$]0; +\infty[$  |  |      |
| 26) | Calculer<br>$(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right))^{24}$   |   |      |
| 27) | Résoudre $x^2 > 5$   |   |      |
| 28) | Compléter.   | $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-3}{2-x} = \dots$                 |      |
| 29) | $\mathcal{D} : y = -\frac{2}{3}x + 1$ .<br><br>Compléter. | L'abscisse de $A$ est ...   |      |
| 30) | Compléter.   | $\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{\dots}{1 + e^x}$                                      |      |

NOM : ..... PRÉNOM : .....

CLASSE : ..... SCORE : /30

✓ Durée : 9 minutes  
✓ L'épreuve comporte 30 questions.  
✓ L'usage de la calculatrice et du brouillon sont interdits. Il n'est pas permis d'écrire des calculs intermédiaires.

### SUJET BCPST



### La course aux nombres