

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 19.

Semaine du lundi 16 février au vendredi 20 février 2026.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de cours de la semaine 18.
2. Propriété de substitution dans les équivalents : deux énoncés (l'un dans lequel une fonction se substitue à la variable de départ, l'autre dans lequel une suite se substitue à la variable de départ) sans démonstration. Exemples :  $\sin(e^{-2x}) \underset{+\infty}{\sim}$  et  $n^{\frac{1}{n}} - 1 \sim$ .
3. Limites et équivalents : énoncer le résultat qui permet de calculer la limite d'une fonction, connaissant un équivalent. Application : déterminer un équivalent en  $x = 1$  puis la limite en 1 de :  
$$x \mapsto \frac{\sin^2(x-1)}{2x^2 - 3x + 1} \text{ (on pourra faire le changement de variable } x = 1 + h\text{)}.$$
4. Définition de fonction négligeable devant une autre. Exemple : comparer  $x$  et  $x^3$  en 0 et en  $+\infty$ . Critère pratique (énoncé sans démonstration). Expression de l'équivalence (avec " $o(g(x))$ ") (sans démonstration). Application : établir les DL à l'ordre 1 en 0 de  $\sin x$ ,  $\tan x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $e^x$ ,  $\sqrt{1+x}$ .
5. Définition de développement limité d'ordre  $n$  en 0 (avec un " $o$ " (petit  $o$ ) **et** avec une fonction  $\varepsilon$ ).
6. Déterminer le développement limité d'ordre  $n$  en 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ , puis de  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ .
7. Développements limités à tout ordre de  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ . Écrire rapidement les  $DL_5(0)$  et  $DL_6(0)$  de  $\cos x$ , le  $DL_6(0)$  de  $\sin x$ , et le  $DL_3(0)$  de  $\sqrt{1+x}$ . **Il faut les connaître par cœur.**
8.  $DL_3(0)$  de  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$  (à retrouver). Expliquer ce qui se passe dans la formule du développement limité de  $(1+x)^\alpha$  si  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Exemple :  $DL_5(0)$  de  $(1+x)^5$ .

Thème de la colle :

CALCULS - poser 5 questions de la **nouvelle** feuille "Course aux nombres" (au verso de ce document). Ces questions doivent être traitées très rapidement. Les étudiants doivent savoir expliquer oralement leurs résultats.

LIMITES

**Définitions** : définition de : limite finie ou infinie en  $a$  fini ou infini pour une fonction. Limites à droite/à gauche. Tendre vers  $l$  par valeurs supérieures/inférieures. Exemples. Unicité de la limite.

**Opérations sur les limites** : Somme, produit, quotient.

**Composition des limites** : Limite d'une fonction composée. Exemple. Suite et limite de fonction. Corollaires : deux moyens de montrer qu'une fonction n'a pas de limite en  $a$  à l'aide de suites. Application : montrer que  $x \mapsto \cos x$  n'a pas de limite en  $+\infty$ , et que  $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$  n'a pas de limite en 0.

**Limites et inégalités** : Propriété vraie au voisinage de  $a$ . Signé et limite. Passage à la limite dans une inégalité. Limite par encadrement. Extension aux limites infinies.

**Limite et monotonie** : Une fonction croissante sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  possède une limite en  $a$  et une limite en  $b$ . **Fonctions équivalentes** Définition. Notations. Règles à connaître. Substitution. Équivalents et limites.

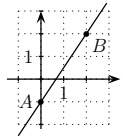
**Fonction négligeable devant une autre** : Définition, notation " $o$ ". Exemples. Expression de l'équivalence. Exemples. Croissances comparées. Propriétés.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

**Développement limité d'ordre  $n$  en  $a$ , en 0**

Définition. Pour un DL en  $a$ , se ramène toujours à un DL en 0 en posant  $x = a + h$ . Exemples. DL de  $\frac{1}{1-x}$  et  $\frac{1}{1+x}$ . Cas particulier d'un polynôme. Propriétés : unicité, troncature.

**DL usuels, Opérations sur les DL** : Combinaison linéaire, produit.

	ÉNONCÉ	RÉPONSE	JURY
25)	Signe de $2 + \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$	$\frac{x}{2 + \ln(x)} \begin{array}{c}   0 \quad \dots \quad +\infty \end{array}$	
26)	Dans un repère du plan, $A(0, -1)$ et $B(2, 2)$ .  Compléter.	$C(8, \dots) \in (AB)$	
27)	$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x + 1$ $v : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ Compléter.	$u \circ v : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \dots$	
28)	$f : x \mapsto x^2 - 1$ est une bijection de $[0; +\infty[$ dans $[-1; +\infty[$ . Compléter.	$\forall x \in [-1; +\infty[$ $f^{-1}(x) = \dots$	
29)	Compléter.	$\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} \frac{3}{1 - \ln(x)} = \dots$	
30)	Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij$		

NOM : .....

PRÉNOM : .....

SCORE : ..... / 30

CLASSE : .....

✓ Durée : 9 minutes

✓ L'épreuve comporte 30 questions.

✓ L'usage de la calculatrice et du brouillon sont interdits. Il n'est pas permis d'écrire des calculs intermédiaires.

## SUJET BCPST 1 - MARS 2025



	ÉNONCÉ	RÉPONSE	JURY
1)	30% de 80		
2)	Résoudre $7 - 3x = 2$		
3)	Résoudre $(1 - x)(x - 3) \geq 0$		
4)	Calculer $\cos(7\pi)$		
5)	Expression de la dérivée de $f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$	$f' : x \mapsto \dots$	
6)	Calculer $[\ln(\sqrt{e})]^2$		
7)	Forme exponentielle de $-1 + i$		
8)	Calculer $\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k}$		
9)	$A \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{5,4}(\mathbb{R})$ Taille de la matrice $AB$ ?	$AB \in \mathcal{M}_{\dots, \dots}(\mathbb{R})$	
10)	Compléter.	100 millions = $10^{\dots}$	
11)	Calculer $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$		
12)	Calculer $\binom{6}{4}$		
13)	Compléter.	$\lfloor \sqrt{51} \rfloor = \dots$	
14)	Exprimer en fonction de $n$ , $\sum_{k=0}^n 3$		

	ÉNONCÉ	RÉPONSE	JURY
15)	Calculer $(\sqrt{2})^5 - 4\sqrt{2}$		
16)	Simplifier $2^{n+1} - 2^n$		
17)	Calculer $\prod_{k=1}^{20} \frac{k+1}{k}$		
18)	Déterminer le carré de $A$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$		
19)	Solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' = 2$ .	$f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \dots$	
20)	Compléter.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 1}{1 - n^2} = \dots$	
21)	Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^2 = -9$		
22)	$ x - 3  \leq 0,1 \Leftrightarrow$	$x \in \dots$	
23)	$f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$	Une primitive $F$ de $f$ sur $]0, +\infty[$ est : $F : x \mapsto \dots$	
24)	$A^2 - 3A = I_3 \Leftrightarrow$	$A \times (\dots) = I_3$	