

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 15. SUJET A.

Vendredi 6 février 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Déterminer un équivalent des suites suivantes et en déduire la limite

1. $u_n = n^2 \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$

2. $v_n = 3^{3n} - 4^{2n}$

3. $w_n = \ln(1+n) - n^2$

① $u_n = n^2 \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$
 $\rightarrow 1$ donc s'écrit $1 + \frac{\quad}{\rightarrow 0}$

après, $\frac{n-1}{n+1} = 1 + \left(\frac{n-1}{n+1} - 1\right) = 1 - \frac{2}{n+1}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n+1} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right) \sim \frac{-2}{n+1}$ (équivalent usuel)

De plus, $n+1 \sim n$ (polynôme) donc par quotient des équivalents,

$$\frac{-2}{n+1} \sim \frac{-2}{n}$$

Ainsi, $\ln\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right) \sim \frac{-2}{n}$

Puis, par produit des équivalents, $u_n \sim -2n$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n = -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

② $v_n = 3^{3n} - 4^{2n}$

après, $v_n = (3^3)^n - (4^2)^n = 27^n - 16^n$
 $= 27^n \left(1 - \left(\frac{16}{27}\right)^n\right)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{16}{27}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{16}{27}\right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{16}{27}\right)^n = 1$

Donc $v_n \sim 27^n$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 27^n = +\infty$ (car $27 > 1$) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

$$③ \quad w_n = \ln(1+n) - n^2$$

$$\begin{aligned} \alpha < 2, \quad w_n &= -n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \ln(n(1+\frac{1}{n})) \right) \\ &= -n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \ln n - \frac{1}{n^2} \ln(1+\frac{1}{n}) \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0 \text{ par croissances comparées}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n^2} = 0 \text{ par quotient des limites}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln n}{n^2} - \frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{n^2} = 1$$

$$\text{Ainsi, } w_n \sim -n^2$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 15. SUJET B.

Vendredi 6 février 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Déterminer un équivalent des suites suivantes et en déduire la limite

1. $u_n = n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

2. $v_n = 4^{2n} - 3^{3n}$

3. $w_n = \sqrt{n} - \ln(1+n)$

① $u_n = n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

 $\rightarrow 1$ donc s'écrit $1 + \underbrace{\quad}_{\rightarrow 0}$

après, $\frac{n+1}{n-1} = 1 + \left(\frac{n+1}{n-1} - 1\right) = 1 + \frac{2}{n-1}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n-1} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{2}{n-1}$ (équivalent usuel)

De plus, $n-1 \sim n$ donc par quotient des équivalents, $\frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n}$

Ainsi, $\ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{2}{n}$

Puis, par produit des équivalents, $u_n \sim 2n$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

② $v_n = 4^{2n} - 3^{3n}$

après, $v_n = (4^2)^n - (3^3)^n = 16^n - 27^n$
 $= -27^n \left(1 - \left(\frac{16}{27}\right)^n\right)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{16}{27}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{16}{27}\right| < 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{16}{27}\right)^n = 1$

Donc $v_n \sim -27^n$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -27^n = -\infty$, donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

$$\textcircled{3} \quad w_n = \sqrt{n} - \ln(1+n)$$

$$\begin{aligned} \text{après, } w_n &= \sqrt{n} - \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{n} - \ln n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \sqrt{n} \left(1 - \frac{\ln n}{\sqrt{n}} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0 \text{ par croissances comparées}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} = 0 \text{ par quotient des limites}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln n}{\sqrt{n}} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} = 1$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{w_n \sim \sqrt{n}}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty, \text{ donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty}$$