

## INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 16. SUJET A.

Vendredi 16 février 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Déterminer un équivalent (le plus simple possible) des expressions suivantes au voisinage indiqué. On justifiera les réponses.

1.  $2x^3 + 3x^5$  en  $+\infty$ 

$$\text{au v. } (+\infty), \quad 2x^3 + 3x^5 = 3x^5 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{1}{x^2}\right) \Bigg\} \text{ donc } \boxed{2x^3 + 3x^5 \underset{+\infty}{\sim} 3x^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{x^2} = 1$$

2.  $2x^3 + 3x^5$  en 0

$$\text{au v. } (0), \quad 2x^3 + 3x^5 = 2x^3 \left(1 + \frac{3}{2} x^2\right) \Bigg\} \text{ donc } \boxed{2x^3 + 3x^5 \underset{0}{\sim} 2x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{3}{2} x^2 = 1$$

3.  $\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}$  en  $+\infty$ 

$$\text{au v. } (+\infty), \quad \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} = \frac{2}{x^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2}\right) \Bigg\} \text{ donc } \boxed{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2} = 1$$

4.  $\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}$  en 0

$$\text{au v. } (0), \quad \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} = -\frac{3}{x^4} \left(1 - \frac{2}{3} x^2\right) \Bigg\} \text{ donc } \boxed{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} \underset{0}{\sim} -\frac{3}{x^4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{2}{3} x^2 = 1$$

**Exercice 2 - Déterminer un équivalent au voisinage indiqué et en déduire la limite**

1.  $f: x \mapsto \sqrt{x}(x^{\frac{1}{x}} - 1)$  en  $+\infty$ .

au  $V(+\infty)$ ,  $x^{\frac{1}{x}} - 1 = e^{\frac{1}{x} \ln x} - 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  et  $e^y - 1 \sim y$  donc par substitution,  $e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \sim \frac{\ln x}{x}$

et par produit des équivalents,  $f(x) \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$  par croissances comparées, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2.  $g: x \mapsto \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 - 1}$  en 1.

On pose  $x = 1 + h$  avec  $h \rightarrow 0$

$$g(1+h) = \frac{3(1+h)^2 - 2(1+h) - 1}{(1+h)^3 - 1} = \frac{3(1+2h+h^2) - 2-2h-1}{1+3h+3h^2+h^3-1} = \frac{4h+3h^2}{3h+3h^2+h^3}$$

or  $4h+3h^2 \sim 4h$  et  $3h+3h^2+h^3 \sim 3h$  (polynômes, en 0)

donc par quotient des équivalents,  $g(1+h) \sim \frac{4}{3}$ , donc  $g(x) \sim \frac{4}{3}$

On en déduit  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{4}{3}$

**BONUS non-noté**

Déterminer, sans justifier, un équivalent le plus simple possible des suites :

1.  $e^{2n} - 3n \sim e^{2n}$

6.  $n^2 \ln\left(\frac{3}{n} + 1\right) \sim 3n$

2.  $3 + 5\sqrt{n} - (\ln(n))^5 \sim 5\sqrt{n}$

7.  $\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

3.  $n^2 \ln(n+1) \sim n^2 \ln n$

8.  $2n + 7n^3 \sim 7n^3$

4.  $\ln(3n^2) \sim 2\ln n$

9.  $\frac{2}{n^3} - \frac{3}{n^2} \sim -\frac{3}{n^2}$

5.  $e^{-n} - \frac{1}{3n} \sim -\frac{1}{3n}$

10.  $2\ln(n) - n^2 e^{-n} \sim 2\ln n$

## INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 16. SUJET B.

Vendredi 16 février 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Déterminer un équivalent (le plus simple possible) des expressions suivantes au voisinage indiqué. On justifiera les réponses.

1.  $3x^2 + 4x^5$  en 0

$$\text{au } V(0), \quad 3x^2 + 4x^5 = 3x^2 \left(1 + \frac{4}{3}x^3\right) \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{4}{3}x^3 = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \boxed{3x^2 + 4x^5 \underset{0}{\sim} 3x^2}$$

2.  $3x^2 + 4x^5$  en  $+\infty$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{au } V(+\infty), \quad 3x^2 + 4x^5 = 4x^5 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{1}{x^3}\right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{4} \frac{1}{x^3} = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \boxed{3x^2 + 4x^5 \underset{+\infty}{\sim} 4x^5}$$

3.  $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4}$  en 0

$$\text{au } V(0), \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} = -\frac{3}{x^4} \left(1 - \frac{2}{3}x^3\right) \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{2}{3}x^3 = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \boxed{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} \underset{0}{\sim} -\frac{3}{x^4}}$$

4.  $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4}$  en  $+\infty$ 

$$\text{au } V(+\infty), \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} = \frac{2}{x} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x^3}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x^3} = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \boxed{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}}$$

**Exercice 2 - Déterminer un équivalent au voisinage indiqué et en déduire la limite**

1.  $f: x \mapsto \frac{x^x - 1}{\sqrt{x}}$  en 0.

au  $V(0)$ ,  $x^n - 1 = e^{n \ln x} - 1$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$  et  $e^y - 1 \sim y$ , donc par substitution,  $e^{x \ln x} - 1 \sim x \ln x$

Puis, par quotient des équivalents,  $f(x) \sim \sqrt{x} \ln x$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x = 0$  (car c'est  $x^{\frac{1}{2}} \ln x$ , et par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{2}} \ln x = 0$ )

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2.  $g: x \mapsto \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 1}$  en 1.

On pose  $g(1+h)$ , avec  $h \rightarrow 0$

$$g(1+h) = \frac{2(1+h)^2 - 3(1+h) + 1}{(1+h)^3 - 1} = \frac{2(1+2h+h^2) - 3 - 3h + 1}{1+3h+3h^2+h^3-1} = \frac{h+2h^2}{3h+3h^2+h^3}$$

Or  $h+2h^2 \sim h$  et  $3h+3h^2+h^3 \sim 3h$  (polynômes en 0)

donc par quotient des équivalents,  $g(1+h) \sim \frac{1}{3}$

On en déduit  $\lim_{h \rightarrow 0} g(1+h) = \frac{1}{3}$ , qui s'écrit aussi  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{3}$

**BONUS non-noté**

Déterminer, sans justifier, un équivalent le plus simple possible des suites :

1.  $\ln(3n^2) \sim 2 \ln n$

2.  $e^{-n} + \frac{3}{n} \sim \frac{3}{n}$

3.  $n^2 \ln(n + \frac{1}{2n}) \sim n^2 \ln n$

4.  $3\sqrt{n} - 5(\ln(n))^7 \sim 3\sqrt{n}$

5.  $e^{2n} - 3n \sim e^{2n}$

6.  $n^2 \ln(n+1) \sim n^2 \ln n$

7.  $\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

8.  $2n + 7n^3 \sim 7n^3$

9.  $\frac{2}{n^3} - \frac{3}{n^2} \sim -\frac{3}{n^2}$

10.  $2 \ln(n) - n^2 e^{-n} \sim 2 \ln(n)$