

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 20.

Semaine du lundi 9 mars au vendredi 13 mars 2026.

**Questions de cours :**

1. Toutes les questions de cours de la semaine 18.
2. Déterminer le  $DL_5(0)$  de la fonction tangente (par produit des DL de  $\sin(x)$  et de  $\frac{1}{\cos(x)}$ ).
3. Montrer que pour étudier la limite en 0 de  $\frac{f(x)}{x^n}$ , un  $DL_n(0)$  de  $f$  suffit. Application : déterminer la limite en 0 de  $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^3}$ .
4. Soit  $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ . Effectuer un  $DL_2(0)$  de  $f$ . En déduire l'allure de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage du point d'abscisse 0 (faire un dessin). On donnera l'équation de la tangente à la courbe.
5. Si  $f(1+h) = 2 + \frac{h}{2} + 2h^3 + o(h^3)$ , tracer l'allure locale de  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de 1. On donnera l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.  
Si  $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$ , tracer l'allure locale de  $\mathcal{C}_g$  au voisinage de 0. On donnera l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
6. Définition de probabilité uniforme sur un univers. Exemple : on lance 5 fois un pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois pile ? (donner l'univers, justifier qu'on le munit de la probabilité uniforme et définir un évènement pour répondre à la question).

**Thème de la colle :**

CALCULS - poser 5 questions de la **nouvelle** feuille "Course aux nombres" (au verso de ce document). Ces questions doivent être traitées très rapidement. Les étudiants doivent savoir expliquer oralement leurs résultats.

LIMITES

Tout le cours

**Calculs de limites à l'aide de développements limités (simples) et/ou d'équivalents**

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

**Développement limité d'ordre n en a, en 0**

Définition. Pour un DL en a, se ramène toujours à un DL en 0 en posant  $x = a + h$ . Exemples. DL de  $\frac{1}{1-x}$  et  $\frac{1}{1+x}$ . Cas particulier d'un polynôme. Propriétés : unicité, troncature.

**DL usuels**

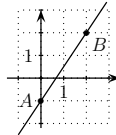
**Opérations sur les DL**

Combinaison linéaire. Produit. Composée de deux DL.

**Applications des développements limités**

Lien avec les équivalents : si  $f$  admet un  $DL_n(0)$  et si ce DL est non-nul, alors  $f$  est équivalente en 0 au premier terme non-nul du DL. Application au calcul de limites. Étude locale d'une courbe.

**Formule de Taylor-Young, DL de f à partir du DL de sa dérivée**

|     | ÉNONCÉ                                                                                                                                               | RÉPONSE                                                                           | JURY |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------|
| 25) | Signe de $2 + \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$                                                                                                             | $\frac{x}{2 + \ln(x)} \begin{array}{c}   0 \quad \dots \quad +\infty \end{array}$ |      |
| 26) | Dans un repère du plan, $A(0, -1)$ et $B(2, 2)$ .<br><br>Compléter. | $C(8, \dots) \in (AB)$                                                            |      |
| 27) | $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$<br>$x \mapsto x + 1$<br>$v : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$<br>$x \mapsto \frac{1}{x}$<br>Compléter.   | $u \circ v : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$<br>$x \mapsto \dots$            |      |
| 28) | $f : x \mapsto x^2 - 1$ est une bijection de $[0; +\infty[$ dans $[-1; +\infty[$ . Compléter.                                                        | $\forall x \in [-1; +\infty[$<br>$f^{-1}(x) = \dots$                              |      |
| 29) | Compléter.                                                                                                                                           | $\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} \frac{3}{1 - \ln(x)} = \dots$         |      |
| 30) | Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ :<br>$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij$                                                                     |                                                                                   |      |

NOM : .....

PRÉNOM : .....

SCORE : ..... / 30

CLASSE : .....

- ✓ *Durée : 9 minutes*
- ✓ *L'épreuve comporte 30 questions.*
- ✓ *L'usage de la calculatrice et du brouillon sont interdits. Il n'est pas permis d'écrire des calculs intermédiaires.*

## SUJET BCPST 1 - MARS 2025



|     | ÉNONCÉ                                                                                                        | RÉPONSE                                         | JURY |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|------|
| 1)  | 30% de 80                                                                                                     |                                                 |      |
| 2)  | Résoudre $7 - 3x = 2$                                                                                         |                                                 |      |
| 3)  | Résoudre $(1 - x)(x - 3) \geq 0$                                                                              |                                                 |      |
| 4)  | Calculer $\cos(7\pi)$                                                                                         |                                                 |      |
| 5)  | Expression de la dérivée de $f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$                       | $f' : x \mapsto \dots$                          |      |
| 6)  | Calculer $[\ln(\sqrt{e})]^2$                                                                                  |                                                 |      |
| 7)  | Forme exponentielle de $-1 + i$                                                                               |                                                 |      |
| 8)  | Calculer $\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k}$                                                                    |                                                 |      |
| 9)  | $A \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{5,4}(\mathbb{R})$<br>Taille de la matrice $AB$ ? | $AB \in \mathcal{M}_{\dots, \dots}(\mathbb{R})$ |      |
| 10) | Compléter.                                                                                                    | 100 millions = $10^{\dots}$                     |      |
| 11) | Calculer $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$                                                |                                                 |      |
| 12) | Calculer $\binom{6}{4}$                                                                                       |                                                 |      |
| 13) | Compléter.                                                                                                    | $\lfloor \sqrt{51} \rfloor = \dots$             |      |
| 14) | Exprimer en fonction de $n$ ,<br>$\sum_{k=0}^n 3$                                                             |                                                 |      |

|     | ÉNONCÉ                                                                           | RÉPONSE                                                                    | JURY |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|------|
| 15) | Calculer $(\sqrt{2})^5 - 4\sqrt{2}$                                              |                                                                            |      |
| 16) | Simplifier $2^{n+1} - 2^n$                                                       |                                                                            |      |
| 17) | Calculer $\prod_{k=1}^{20} \frac{k+1}{k}$                                        |                                                                            |      |
| 18) | Déterminer le carré de $A$<br>$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ |                                                                            |      |
| 19) | Solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' = 2$ .              | $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$<br>$x \mapsto \dots$             |      |
| 20) | Compléter.                                                                       | $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 1}{1 - n^2} = \dots$            |      |
| 21) | Résoudre dans $\mathbb{C}$<br>$z^2 = -9$                                         |                                                                            |      |
| 22) | $ x - 3  \leq 0,1 \Leftrightarrow$                                               | $x \in \dots$                                                              |      |
| 23) | $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$<br>$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$        | Une primitive $F$ de $f$ sur $]0, +\infty[$ est :<br>$F : x \mapsto \dots$ |      |
| 24) | $A^2 - 3A = I_3 \Leftrightarrow$                                                 | $A \times (\dots) = I_3$                                                   |      |