

LIMITES.

Exercice 1. Étudier les limites des fonctions suivantes en $+\infty$:

$$x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x} ; \quad x \mapsto x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor.$$

Exercice 2. Étudier les limites des fonctions suivantes en 0 :

$$x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor ; \quad x \mapsto x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor ; \quad x \mapsto x^2 \lfloor \frac{1}{x} \rfloor.$$

Exercice 3. Étudier les limites suivantes. Dans certains cas, il pourra être intéressant de faire un calcul d'équivalent.

Indication : pour la recherche de la limite de $f(x)$ quand x tend vers un réel a différent de 0, on pourra poser $x = a + h$ et étudier la limite de $f(a + h)$ quand h tend vers 0.

$$\begin{array}{lll} a) \frac{x^3 + x + 52}{4x^3 - 30x^2} \text{ en } +\infty, & b) \frac{x^2 - 3x + 2}{x^n - 1} \text{ en } 1 (n \in \mathbb{N}^*) & c) \frac{\sin(x \ln x)}{x} \text{ en } 0, \\ d) \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3} \text{ en } 1, & e) \frac{1}{x^x} \text{ en } +\infty, & f) x^x \text{ en } 0, \\ j) \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} \text{ en } \frac{\pi}{4}, & k) \frac{\sin 3x}{\sqrt{1 - 2 \cos x}} \text{ en } \frac{\pi}{3}, & l) (1 + \frac{1}{x})^x \text{ en } +\infty. \\ m) x(1 - \cos \frac{1}{x}) \text{ en } +\infty, & n) \ln(3x^2 + 2x) - \ln(2x^2 + 3x) \text{ en } +\infty, & o) (1 - e^x) \ln x \text{ en } 0. \end{array}$$

Exercice 4. Déterminer un équivalent aux voisinages précisés.

Indication : pour la recherche d'un équivalent de $f(x)$ en un réel a différent de 0, on posera $x = a + h$ et on étudiera un équivalent de $f(a + h)$ quand h tend vers 0.

$$\begin{array}{llll} 1 + 5x \text{ (en } 0), & 1 + 5x \text{ (en } +\infty), & \sin(x^2 + x) \text{ (en } 0), & 2x \ln \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3} \right) \text{ (en } +\infty), \\ \cos(\sin x) \text{ (en } 0), & \ln(\cos x) \text{ (en } 0), & x^2 - 3x + 1 \text{ (en } 1), & x^2 + \frac{1}{x} \text{ (en } 1), \\ \tan \left(\frac{\pi}{2x + 1} \right) \text{ (en } 0), & (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x) \text{ (en } \frac{1}{2}), & \ln(\sin x) \text{ (en } 0), & \cos(x) \text{ (en } \frac{\pi}{2}), \\ \sin^2 x + \tan^3 x \text{ (en } 0), & \sin(x) - \frac{1}{2} \text{ (en } \frac{\pi}{6}), & x^3 + x^2 + x - 3 \text{ (en } 1). & \end{array}$$

Exercice 5. Montrer qu'une fonction périodique qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

Indication : la proposition à montrer peut se formuler de la manière suivante :

"Soit f une fonction périodique.

Si f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est constante."

Montrer la contraposée.

Exercice 1

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$. On multiplie par $\frac{1}{x} > 0$, d'où $1 - \frac{1}{x} \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$. Ces limites sont égales.

Donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$.

- 2) $\forall x \in]1, +\infty[, x > 1$ donc $0 < \frac{1}{x} < 1$. Donc $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$.

Donc $\forall x \in]1, +\infty[, x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$.

La fonction $x \mapsto x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ est donc constante égale à 0 au voisinage de $+\infty$. Donc sa limite vaut 0 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$$

Exercice 2

- 1) On se rend compte que $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ a "à peu près le même comportement que $\frac{1}{x}$ ". Donc il semblerait qu'il n'y ait pas de limite, pour cause de limites différentes à droite et à gauche de 0. On va donc étudier les limites à droite et à gauche en 0.

En 0^+ :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor.$$

Et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - 1 = +\infty$,
donc par comparaison,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = +\infty$$

En 0^- :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}.$$

Et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$,
donc par comparaison,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = -\infty$$

Conclusion :

$x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ a des limites différentes à droite et à gauche de 0, donc elle n'a pas de limite en 0.

- 2) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$.

On va multiplier par x : attention au signe de x . Nous allons distinguer les cas suivant que $x > 0$ ou $x < 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 - x \leq x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, 1 \leq x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1 - x.$$

On constate que $\forall x \in \mathbb{R}^*, 1 - |x| \leq x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1 + |x|$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - |x| = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + |x| = 1$. Ces limites sont égales donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$$

- 3) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$.

On multiplie par $x^2 > 0$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}^*, x - x^2 \leq x^2 \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq x$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} x - x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Ces limites sont égales donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$$

Exercice 3

• l) $(1 + \frac{1}{x})^x = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

$$\begin{cases} \ln(1+y) \underset{0}{\sim} y \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 1 \end{cases} \text{ donc par substitution, } \ln(1 + \frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Puis, par produit des équivalents, $x \ln(1 + \frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} 1$.

On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = 1$, puis, par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = e$

• m) $x(1 - \cos(1/x))$ en $+\infty$.

$$\begin{cases} 1 - \cos(y) \underset{0}{\sim} \frac{y^2}{2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \text{ donc par substitution, } 1 - \cos(1/x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}.$$

Puis, par produit des équivalents, $x(1 - \cos(1/x)) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \cos(1/x)) = 0$

• n) $\ln(3x^2 + 2x) - \ln(2x^2 + 3x)$ en $+\infty$

$$\begin{aligned} \ln(3x^2 + 2x) - \ln(2x^2 + 3x) &= \ln\left(\frac{3x^2 + 2x}{2x^2 + 3x}\right) \\ \frac{3x^2 + 2x}{2x^2 + 3x} &= \frac{3 + 2/x}{2 + 3/x} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{2x^2 + 3x} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3x^2 + 2x}{2x^2 + 3x}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

• o) $(1 - e^x) \ln(x)$ en 0.

$1 - e^x \underset{0}{\sim} -x$ donc par produit des équivalents, $(1 - e^x) \ln(x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x)$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} -x \ln(x) = 0$ par croissances comparées, donc $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) \ln(x) = 0$

Exercice 4

• $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sin x) = 1 \neq 0$ donc $\cos(\sin(x)) \underset{0}{\sim} 1$.

• $\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1))$. Or $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x - 1 = 0 \\ \ln(1+y) \underset{0}{\sim} y \end{cases}$ Donc par substitution, $\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} \cos x - 1$.

de plus, $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Ainsi, $\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

• $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 3x + 1 = -1 \neq 0$ donc $x^2 - 3x + 1 \underset{1}{\sim} -1$.

• $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \frac{1}{x} = 2 \neq 0$ donc $x^2 + \frac{1}{x} \underset{1}{\sim} 2$.

• $\ln(\sin x) = \ln(x(\frac{\sin x}{x})) = \ln x + \ln \frac{\sin x}{x} = \ln x(1 + \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{\ln x})$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{\ln x} = 1$. Donc $\ln(\sin x) \underset{0}{\sim} \ln x$.

• $\cos x$ en $\frac{\pi}{2}$: on pose $x = \frac{\pi}{2} + h$.

$$\cos(\frac{\pi}{2} + h) = \cos(\frac{\pi}{2} - (-h)) = \sin(-h) = -\sin h.$$

Or $\sin h \underset{0}{\sim} h$, d'où $\cos(\frac{\pi}{2} + h) \underset{0}{\sim} -h$.

Ainsi, $\cos x \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -(x - \frac{\pi}{2})$.

- $\sin^2 x + \tan^3 x = (\sin^2 x)(1 + \frac{\tan^3 x}{\sin^2 x})$.

Or $\tan^3 x \underset{0}{\sim} x^3$ et $\sin^2 x \underset{0}{\sim} x^2$ donc par quotient des équivalents, $\frac{\tan^3 x}{\sin^2 x} \underset{0}{\sim} x$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, on en

déduit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x}{\sin^2 x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{\tan^3 x}{\sin^2 x} = 1$.

Ainsi, $\sin^2 x + \tan^3 x \underset{0}{\sim} \sin^2 x$. Puis, puisque $\sin^2 x \underset{0}{\sim} x^2$:

$\sin^2 x + \tan^3 x \underset{0}{\sim} x$.

- $\sin(x) - \frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6}$.

On pose $x = \frac{\pi}{6} + h$ (avec $h \rightarrow 0$).

$$f(\frac{\pi}{6} + h) = \sin(\frac{\pi}{6} + h) - \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \cos h + \cos \frac{\pi}{6} \sin(h) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos h + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin h - \frac{1}{2}.$$

Ici, le mieux est d'effectuer un développement limité. L'ordre 1 suffit :

$\cos h \underset{0}{=} 1 + o(h)$ et $\sin h \underset{0}{=} h + o(h)$ donc par combinaison linéaire des DL,

$\frac{1}{2} \cos h + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin h - \frac{1}{2} \underset{0}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} h + o(h)$. Ce DL étant non-nul, on obtient un équivalent (le premier terme non-nul du DL).

Ainsi, $f(\frac{\pi}{6} + h) \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{2} h$, ou encore : $\sin x - \frac{1}{2} \underset{\frac{\pi}{6}}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{2} (x - \frac{\pi}{6})$.

- $f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$. On pose $x = 1 + h$.

$$f(1 + h) = (1 + h)^3 + (1 + h)^2 + (1 + h) - 3 = 3h + 3h^2 + h^3 + 2h + h^2 + h = 6h + 4h^2 + h^3 \underset{0}{\sim} 6h.$$

Donc $f(x) \underset{1}{\sim} 6(x - 1)$.

Exercice 5

Montrer qu'une fonction périodique qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

la proposition à montrer peut se formuler de la manière suivante :

"Soit f une fonction périodique.

Si f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est constante."

Montrons la contraposée : "Si f n'est pas constante, alors f n'a pas de limite finie en $+\infty$:

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique.

Posons $T > 0$ une période de f . Ainsi,

$$\forall x \in D, f(x + T) = f(x)$$

On suppose que f est non-constante.

Il existe donc a et b appartenant à D tels que $f(a) \neq f(b)$.

On définit alors deux suites (a_n) et (b_n) de la manière suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a + nT$ et $b_n = b + nT$.

D'une part, puisque f est T -périodique, $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) = f(a)$ et $f(b_n) = f(b)$.

Donc les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ sont constantes. Elles ont donc chacune une limite quand n tend vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(a)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(b)$. On remarque que ces deux limites sont différentes car a et b ont été choisis pour que $f(a) \neq f(b)$.

D'autre part, $T > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

Si f avait une limite, notée ℓ en $+\infty$, alors, par composition des limites, on aurait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \ell.$$

Or ce n'est pas le cas car nous avons vu que ces deux suites avaient des limites différentes.

On en déduit que f n'a pas de limite en $+\infty$ (donc en particulier pas de limite finie. En fait, on a même montré mieux : qu'elle n'a pas du tout de limite!)