

SUITES ÉQUIVALENTES.

Exercice 1. Déterminer un équivalent (le plus simple possible) des suites (u_n) suivantes définies pour $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire leur limite :

$$\begin{array}{lll} u_n = \frac{n^3 + n \sin(n^{10} + n^7)}{n + \ln n} & u_n = n^2(\ln n)^4 - n^3(\ln n)^2 + (-1)^n n^2 e^{-n} & u_n = \frac{n + \sqrt{n} \ln n}{\sqrt{n+2}} \\ u_n = \ln(2n^{15}) + 15n^2 & u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 3n + 6}{n^2 + 1}\right) & u_n = \ln(3n^{10} + 1) \\ u_n = \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right) & u_n = n^2 \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) & u_n = \exp(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) - 1. \\ u_n = \frac{\ln(n^3 + 1)}{n^2 - n + 2} & u_n = \frac{n^3 + n + 1}{n + \sqrt{n}} e^{-n} & u_n = \frac{n^3 + 5n + 2}{3^n + 3(-1)^n} \\ u_n = 3^{2n} + 2^{3n}, & u_n = e^n + e^{2n} - \sqrt{e^n}, & u_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \\ u_n = \ln(2 - e^{\frac{1}{n}}), & u_n = \ln\left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1}\right), & u_n = \frac{\sqrt{1 + e^{-n}} - 1}{e^{-2n}} \\ u_n = (2n)^{\frac{1}{n}} - 1, & u_n = \sqrt{e^{\frac{1}{n}}} - 1, & u_n = \left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)\right)^n. \end{array}$$

Exercice 2. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Démontrez-la (ou citez la proposition du cours à laquelle elle fait référence) dans le premier cas, et donnez un contre-exemple dans le second cas.

1. Si $u_n \sim v_n$ et si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\frac{u_n}{v_n} \sim 1$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$), alors $u_n \sim l$.
3. Si $u_n \sim v_n$, alors $(u_n - v_n)$ est une suite qui tend vers 0.
4. Si $u_n \sim v_n$, alors $n + u_n \sim n + v_n$.
5. Si $u_n \sim v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, alors $n + u_n \sim n + v_n$.
6. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^n = 1$.
7. Il existe une suite (u_n) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^n = +\infty$.
8. Il existe une suite (u_n) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^n = 0$.
9. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$, alors $(u_n)^n \sim 2^n$.
10. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^n = +\infty$.

Exercice 1.

$$u_n = \frac{\ln(n^3 + 1)}{n^2 - n + 2}$$

$\ln(n^3 + 1) = \ln(n^3) + \ln(1 + \frac{1}{n^3}) = 3 \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n^3}) = 3 \ln n(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n^3})}{3 \ln n})$. Or $\lim 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n^3})}{3 \ln n} = 1$,

donc $\ln(n^3 + 1) \sim 3 \ln n$.

$n^2 - n + 2 \sim n^2$ (polynôme).

Donc par quotient des équivalents, $u_n \sim \frac{3 \ln n}{n^2}$.

Puisque $\lim \frac{3 \ln n}{n^2} = 0$ (par C.C.), on en déduit $\lim u_n = 0$.

$$u_n = \frac{n^3 + n + 1}{n + \sqrt{n}} e^{-n}$$

$n^3 + n + 1 \sim n^3$ (polynôme en n)

$n + \sqrt{n} = n(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ apcr.

Or $\lim 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$ donc $n + \sqrt{n} \sim n$.

Ainsi, par produit et quotient des équivalents, $u_n \sim \frac{n^3}{n} e^{-n}$.

Donc $u_n \sim n^2 e^{-n}$.

Puisque $\lim n^2 e^{-n} = 0$ par C.C., on en déduit $\lim u_n = 0$.

$$u_n = \frac{n^3 + 5n + 2}{3^n + 3(-1)^n}$$

$n^3 + 5n + 2 \sim n^3$ (polynôme).

$3^n + 3(-1)^n = 3^n(1 + 3(\frac{-1}{3})^n)$ apcr. Or $\lim 1 + 3(\frac{-1}{3})^n = 1$, donc $3^n + 3(-1)^n \sim 3^n$.

Ainsi, par quotient des équivalents, $u_n \sim \frac{n^3}{3^n}$.

($3 > 1$, donc $\lim 3^n = +\infty$: c'est une forme indéterminée).

Par croissance comparée, $\lim \frac{n^3}{3^n} = 0$. Donc $\lim u_n = 0$.

$$u_n = 3^{2n} + 2^{3n}$$

$u_n = 9^n + 8^n = 9^n(1 + (\frac{8}{9})^n)$ apcr.

Or $\lim (\frac{8}{9})^n = 0$ car $|\frac{8}{9}| < 1$, donc $\lim 1 + (\frac{8}{9})^n = 1$.

Ainsi $u_n \sim 9^n$.

Or $\lim 9^n = +\infty$ car $9 > 1$. Donc $\lim u_n = +\infty$.

$$u_n = e^n + e^{2n} - \sqrt{e^n}$$

$u_n = e^{2n}(1 + e^{-n} - e^{-3n/2})$ apcr, avec $\lim 1 + e^{-n} - e^{-3n/2} = 1$. Donc $u_n \sim e^{2n}$.

Puisque $\lim e^{2n} = +\infty$, on en déduit $\lim u_n = +\infty$.

$$u_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$$

$e^n - e^{-n} = e^n(1 - e^{-2n})$ apcr, avec $\lim 1 - e^{-2n} = 1$. Donc $e^n - e^{-n} \sim e^n$.

De même, on montre que $e^n + e^{-n} \sim e^n$.

Donc, par quotient des équivalents, $u_n \sim 1$. D'où $\lim u_n = 1$.

$$u_n = \ln(2 - e^{\frac{1}{n}}) \text{ (on constate tout de suite, par composition des limites, que cette suite tend vers 0)}$$

On constate que la suite à l'intérieur du $\ln$ tend vers 1. Donc elle s'écrit : $1 +$ (une suite qui tend vers 0).

$$\ln(2 - e^{\frac{1}{n}}) = \ln(1 + (1 - e^{\frac{1}{n}})).$$

$\lim 1 - e^{\frac{1}{n}} = 0$ donc $\ln(1 + (1 - e^{\frac{1}{n}})) \sim 1 - e^{\frac{1}{n}}$.

Or $\lim \frac{1}{n} = 0$ donc $1 - e^{\frac{1}{n}} \sim -\frac{1}{n}$ (équivalent usuel).

Ainsi, par transitivité de $\sim$, on en déduit $u_n \sim \frac{-1}{n}$.

$$u_n = \ln\left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} = 2$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} \ln(y) = \ln 2 \text{ (par continuité de la fonction } \ln \text{ en } 2)$$

Donc par composition des limites, $\lim u_n = \ln 2$.

Puisque $\ln 2 \neq 0$, on en déduit $u_n \sim \ln 2$.

$$u_n = \frac{\sqrt{1 + e^{-n}} - 1}{e^{-2n}}$$

$$\lim e^{-n} = 0 \text{ donc (équivalent usuel) } \sqrt{1 + e^{-n}} - 1 \sim \frac{e^{-n}}{2}$$

$$\text{donc par quotient des équivalents, } u_n \sim \frac{e^n}{2}.$$

$$\text{Puisque } \lim \frac{e^n}{2} = +\infty, \text{ on en déduit } \lim u_n = +\infty.$$

$$u_n = (2n)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$u_n = e^{\frac{1}{n} \ln(2n)} - 1. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(2n) = 0 \text{ par CC. Donc (équivalent usuel) } e^{\frac{1}{n} \ln(2n)} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln(2n).$$

$$\text{Or } \ln 2n = \ln n + \ln 2 = \ln n \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln n}\right) \text{ apcr. Or } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{\ln 2}{\ln n} = 1 \text{ donc } \ln 2n \sim \ln n.$$

$$\text{Ainsi, par produit des équivalents, } u_n \sim \frac{\ln n}{n}.$$

$$\text{Puisque } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0, \text{ on en déduit } \lim u_n = 0.$$

$$u_n = \sqrt{e^{\frac{1}{n}}} - 1 \text{ (on constate tout de suite, par composition des limites, que cette suite tend vers 0)}$$

$$u_n = (e^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{2}} - 1 = e^{\frac{1}{2n}} - 1.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0 \text{ donc par équivalent usuel, } e^{\frac{1}{2n}} - 1 \sim \frac{1}{2n}.$$