

SUITES.

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

1. Si (u_n) est bornée, alors elle converge.
2. Si (u_n) converge, alors (u_n) est bornée.
3. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et si (u_n) converge vers ℓ , alors $\ell > 0$.
4. La suite $\left(\frac{\cos(n^3)}{n+1}\right)$ est convergente.
5. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \ell$.

Exercice 2. Déterminer si les suites suivantes ont une limite, et si oui, la calculer. On pourra utiliser le théorème suivant (**Théorème de composition des limites**) :

Soient a et b appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = b$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n+2}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (\ln(n^2+2))_{n \in \mathbb{N}}, \quad (n-\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left((-1)^n + \frac{1}{\ln(n+4)}\right)_{n \in \mathbb{N}} \\ & (n+(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{\exp(2n)}{\exp(3n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (\exp(2n) - \exp(3n))_{n \in \mathbb{N}}, \quad (\exp(-2n) - \exp(-3n))_{n \in \mathbb{N}}, \\ & \left(\frac{(e^n)^2}{e^{2n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (\exp(2 - \ln(3+n)))_{n \in \mathbb{N}}, \quad ((e^{2n})^3 - (e^{3n})^2)_{n \in \mathbb{N}}, \quad ((ne^{2n})^3 - (2ne^{3n})^2)_{n \in \mathbb{N}}, \\ & (\ln(n^3+2n+1) - 3\ln(n+2))_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{50n^4+8n^3}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{2n^3+n \sin n}{n^3+3}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{(-1)^n+2n}{(-1)^{3n}+3n}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \\ & \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad \left(\left\lfloor \frac{4n}{5} \right\rfloor\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{n}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{\ln(n^2)}{\ln(n^3)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}, \\ & \left((-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad (\ln(\sqrt{n}) - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad (\ln(n+1) - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}, \\ & \left(\frac{3^n-2^n}{3^{n+2}}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (5^n - 5^{-n})_{n \in \mathbb{N}}, \quad (3^{3n} - 6^{2n})_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{\cos(2u_n)}{\sqrt{n+1}}$. Montrer que cette suite converge.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et positif.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$ (on pourra faire apparaître une quantité conjuguée).
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 5. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{3}{u_n})$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Montrer qu'elle est minorée par $\sqrt{3}$.
3. Montrer qu'elle converge vers $\sqrt{3}$.

Exercice 6. Soit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x^2 + 2x \end{aligned}$$

et soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. ($a \in \mathbb{R}$)

1. Tracer le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = x$.
2. Déterminer graphiquement le comportement en $+\infty$ de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :
 $a = \frac{1}{2}, a = -1$.
3. Si $a < 0$, montrer que la suite a pour limite $-\infty$. On commencera par montrer qu'elle est décroissante.

Exercice 7. On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{1 + 3u_n}. \end{cases}$$

On pose : $f : x \mapsto \frac{3}{1 + 3x}$.

1. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}_+$ et construire les premiers termes de la suite.
2. On pose $I = [0, 3]$. Montrer que I est stable par f (c'est à dire que $f(I) \subset I$, ou encore : $\forall x \in I, f(x) \in I$.)
3. En déduire que la suite (u_n) est bien définie.
4. Déterminer les points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+$ (c'est à dire les réels x vérifiant $f \circ f(x) = x$).
5. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies contraires.
6. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et préciser leurs limites.
7. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?

Exercice 9. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} \geq a_{n+1}$.
3. En déduire que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.
4. Montrer que ces deux suites sont convergentes.
5. En déduire qu'elles sont adjacentes.

Exercice 10. Pour tout $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$, on pose $(E_n) : x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. Soit x_n cette solution.
2. Montrer que $\forall n \geq 3, x_n \in]0, 1[$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$.
4. Montrer que $(x_n)_{n \geq 3}$ converge et calculer sa limite.

Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x^2 + 2x - 1$.

CORRECTION.

Exercice 1.

Exercice 2. • $\lim \exp(-2n) - \exp(-3n) = 0$ par somme des limites.

- $\lim \frac{(e^n)^2}{e^{2n+1}} = \frac{1}{e}$, car la suite est constante.
- $\lim \exp(2 - \ln(3 + n)) = 0$ par composition des limites.
- $\lim (e^{2n})^3 - (e^{3n})^2 = 0$ car la suite est constante.
- $((ne^{2n})^3 - (2ne^{3n})^2 = n^3 e^{6n} - 4n^2 e^{6n} = e^{6n}(n^3 - 4n^2)$.

$\lim e^{6n} = +\infty$, et $n^3 - 4n^2 = n^3(1 - \frac{4}{n})$ donc tend vers $+\infty$ par produit des limites. Ainsi, par produit des limites, $\lim ((ne^{2n})^3 - (2ne^{3n})^2 = +\infty$.

- $\ln(n^3 + 2n + 1) - 3 \ln(n + 2) = \ln \left(\frac{n^3 + 2n + 1}{(n + 2)^3} \right)$. Or $\frac{n^3 + 2n + 1}{(n + 2)^3} = \frac{n^3(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3})}{n^3(1 + \frac{2}{n})^3} = \frac{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{(1 + \frac{2}{n})^3}$.

Donc par quotient des limites, $\lim \frac{n^3 + 2n + 1}{(n + 2)^3} = 1$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$, donc par composition des

limites, $\lim \ln \left(\frac{n^3 + 2n + 1}{(n + 2)^3} \right) = 0$.

- $\lim \frac{50n^4 + 8n^3}{n^2 + 1} = +\infty$.

- $\lim \frac{2n^3 + n \sin n}{n^3 + 3} = 2$.

- $\frac{(-1)^n + 2n}{(-1)^{3n} + 3n} = \frac{2n(1 + \frac{(-1)^n}{2n})}{3n(1 + \frac{(-1)^{3n}}{3n})} = \frac{2}{3} \frac{1 + \frac{(-1)^n}{2n}}{1 + \frac{(-1)^{3n}}{3n}}$. Or la suite $(\frac{(-1)^n}{2n})$ tend vers 0 car c'est le produit d'une

suite bornée par une suite qui tend vers 0. De même pour $(\frac{(-1)^{3n}}{3n})$. On en déduit : $\lim \frac{(-1)^n + 2n}{(-1)^{3n} + 3n} = \frac{2}{3}$.

- $\lim \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0$ par composition des limites. • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{4n}{5} - 1 \leq E(\frac{4n}{5}) \leq \frac{4n}{5}$. On multiplie par $\frac{1}{n} > 0$:

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{n} \leq \frac{E(\frac{4n}{5})}{n} \leq \frac{4}{5}.$$

De plus, $\lim \frac{4}{5} - \frac{1}{n} = \frac{4}{5}$ et $\lim \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$. Ces limites sont égales, donc d'après le théorème de limite par

encadrement, la suite $(\frac{E(\frac{4n}{5})}{n})$ converge vers $\frac{4}{5}$.

- $u_n = E(\frac{n}{2}) - \frac{n}{2}$: On constate qu'on n'arrive pas à encadrer pour utiliser le théorème des gendarmes. C'est peut-être que cette suite ne converge pas. Pour prouver sa non-convergence, nous allons étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = E(n) - n = n - n = 0$. Donc $\lim u_{2n} = 0$ (suite constante).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = E(n + \frac{1}{2}) - (n + \frac{1}{2}) = n - (n + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$. Donc de même, $\lim u_{2n+1} = -\frac{1}{2}$.

Donc les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, mais vers des limites différentes.

On en déduit que la suite (u_n) n'a pas de limite.

- $\forall n \geq 2$, $\frac{\ln(n^2)}{\ln(n^3)} = \frac{2 \ln n}{3 \ln n} = \frac{2}{3}$. Donc la limite est $\frac{2}{3}$.

- $(-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n+1}) = 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0).

- $\forall n \geq 2$, $\ln(\sqrt{n}) - \ln(n) = \frac{1}{2} \ln n - \ln n = -\frac{1}{2} \ln n$. Donc $\lim \ln(\sqrt{n}) - \ln(n) = -\infty$.

- $\forall n \geq 2$, $\ln(n + 1) - \ln(n) = \ln \frac{n + 1}{n} = \ln(1 + \frac{1}{n})$ donc $\lim \ln(n + 1) - \ln(n) = 0$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3^n - 2^n}{3^{n+2}} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Donc la limite est $\frac{1}{9}$, par somme des limites (car $|\frac{2}{3}| < 1$ donc

$\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$).

- $\lim 5^n - 5^{-n} = 0$ par somme des limites (car $5^{-n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ qui tend vers 0 car $|\frac{1}{5}| < 1$).
 - $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n} - 6^{2n} = 9^n - 36^n = -36^n(1 - \frac{1}{4^n})$.
- $\lim 1 - \frac{1}{4^n} = 1$ et $\lim -36^n = -\infty$ donc par produit des limites, $\lim -36^n(1 - \frac{1}{4^n}) = -\infty$.

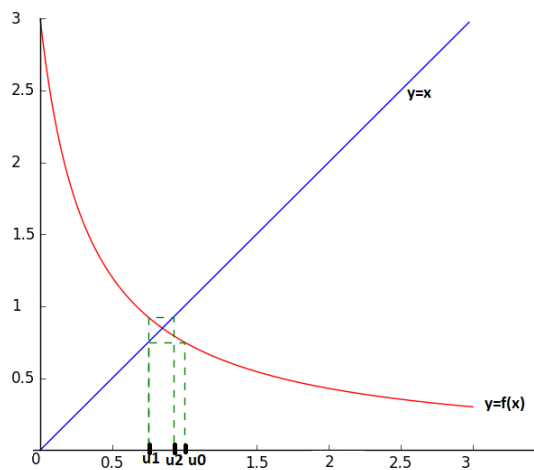
Exercice 8.

1. La fonction f est une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}, f'(x) = \frac{-9}{(1+3x)^2}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}, f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur les intervalles qui composent son ensemble de définition : f est strictement décroissante sur $] -\infty, -\frac{1}{3}[$ et strictement décroissante sur $] -\frac{1}{3}, +\infty[$.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $f(0) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On en déduit le graphe de f ainsi que la construction des premiers termes de la suite :



2. $I = [0, 3]$. Montrons que I est stable par f :

Soit $x \in I$ fixé quelconque. Donc $0 \leq x \leq 3$. On applique f , définie sur $[0, 3]$, décroissante sur $[0, 3]$. D'où : $f(3) \leq f(x) \leq f(0)$.

Or $f(0) = 3$ et $f(3) = \frac{3}{10}$. Ainsi, $0 \leq \frac{3}{10} \leq f(x) \leq 3$. Donc $f(x) \in I$.

Ainsi, I est stable par f .

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : "u_n \text{ existe et } u_n \in I"$$

- $u_0 = 1$ par définition. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

Alors $u_n \in I$ et f est définie sur I , donc $f(u_n)$ existe. De plus, puisque I est stable par f , on a $f(u_n) \in I$. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, la suite (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

4. D'après l'étude de f précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)$ appartient à $\mathbb{R}_+$ donc $f \circ f(x)$ existe. Ainsi, $f \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f \circ f(x) = \frac{3}{1 + 3 \frac{3}{1+3x}} = \frac{3(1+3x)}{10+3x}$$

Résolvons l'équation (E) : $f \circ f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
f \circ f(x) = x &\iff \frac{3(1+3x)}{10+3x} = x \\
&\iff 3+9x = 10x+3x^2 \text{ (on a multiplié par } 10+3x > 0) \\
&\iff 3x^2+x-3=0 \text{ trinôme de discriminant } \Delta = 37 > 0 \\
&\iff x = \frac{-1-\sqrt{37}}{6} (\notin \mathbb{R}_+) \text{ ou } x = \frac{-1+\sqrt{37}}{6} (\in \mathbb{R}_+) \\
&\iff x = \frac{-1+\sqrt{37}}{6}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{l'unique point fixe de } f \circ f \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ est } \frac{-1+\sqrt{37}}{6}}.$

5. Commençons par calculer les premiers termes de la suite (u_n) :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = f(u_0) = \frac{3}{4}, \quad u_2 = f(u_1) = \frac{12}{13}.$$

Donc $u_2 \leq u_0$. De plus, en appliquant f , décroissante sur I à cette inégalité (et puisque u_0 et u_2 appartiennent à I), on obtient $f(u_2) \geq f(u_0)$, c'est à dire $u_3 \geq u_1$.

Montrons que (u_{2n}) est décroissante :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence

$$\mathcal{P}_n : "u_{2n+2} \leq u_{2n}"$$

- Nous avons vu que $u_2 \leq u_0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors,

$$\begin{cases} u_{2n+2} \leq u_{2n} (*) \text{ d'après } \mathcal{P}_n, \\ u_{2n} \text{ et } u_{2n+2} \in I \end{cases}$$

Appliquons f , décroissante sur I , à $(*)$:

$$\begin{cases} u_{2n+3} \geq u_{2n+1} (**) \text{ car } f(u_{2n+2}) = u_{2n+3} \text{ et } f(u_{2n}) = u_{2n+1}, \\ u_{2n+1} \text{ et } u_{2n+3} \in I \end{cases}$$

Appliquons une nouvelle fois f , décroissante sur I , à $(**)$:

$$u_{2n+4} \leq u_{2n+2}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} \leq u_{2n}$. $\boxed{\text{Donc la suite } (u_{2n}) \text{ est décroissante}}.$

Montrons que la suite (u_{2n+1}) est croissante :

Nous venons de montrer que la suite (u_{2n}) est décroissante. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{2n+2} \leq u_{2n} (*), \\ u_{2n} \text{ et } u_{2n+2} \in I \end{cases}$$

Appliquons f , décroissante sur I , à $(*)$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \leq u_{2n+3}$. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_{2n+1}) \text{ est croissante}}.$

6. Nous avons vu que tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à $[0, 3]$. Donc la suite (u_n) est bornée. Il en est de même pour les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) . Ainsi :

- La suite (u_{2n}) est décroissante, minorée. Donc elle converge. On note ℓ_0 sa limite.
- La suite (u_{2n+1}) est croissante, majorée. Donc elle converge. On note ℓ_1 sa limite.

Déterminons ℓ_0 et ℓ_1 :

Tout d'abord, remarquons que, puisque les termes de la suite (u_n) appartiennent à I , :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{2n} \leq 3, \\ (u_{2n}) \text{ converge vers } \ell_0 \end{cases}$$

Donc par passage à la limite dans l'inégalité, $0 \leq \ell_0 \leq 3$. Donc $\ell_0 \in \mathbb{R}_+$.

On montre de même que $\ell_1 \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}), \\ (u_{2n}) \text{ converge vers } \ell_0 \in \mathbb{R}_+, \\ f \circ f \text{ est continue en } \ell_0 (\text{car elle est continue sur } \mathbb{R}_+) \end{cases}$$

On en déduit que ℓ_0 est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f \circ f(x) = x$. Or nous avons vu que cette équation a une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ qui est $\frac{-1 + \sqrt{37}}{6}$.

Donc $\ell_0 = \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}$.

On montre de même que $\ell_1 = \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}$.

7. Nous avons vu à la question précédente que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) étaient convergentes, de même limite $\frac{-1 + \sqrt{37}}{6}$. On en déduit que la suite (u_n) est convergente, de limite $\frac{-1 + \sqrt{37}}{6}$.

Exercice 8

$$\begin{aligned} \bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} < 0 \text{ car } 0 < 2n+1 < 2n+2 \text{ donc } \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

Donc la suite (S_{2n}) est décroissante.

$$\begin{aligned} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0 \text{ car } 0 < 2n+2 < 2n+3 \text{ donc } \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

Donc la suite (S_{2n+1}) est croissante.

$$\begin{aligned} \bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n+1} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{-1}{2n+1} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) = +\infty$ donc par quotient des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$.

• Conclusion : les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

→ On en déduit, par théorème des suites adjacentes, qu'elles convergent et qu'elles ont même limite.

→ Puis : puisque (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite, par proposition du cours, on en déduit que la suite (S_n) converge vers la limite commune de (S_{2n}) et (S_{2n+1}) .

Exercice 9

1. Tout d'abord, on remarque que les suites sont définies à l'aide d'une racine carrée. S'il existait un entier n tel que $a_n b_n < 0$, alors on ne pourrait pas calculer b_{n+1} et il y aurait un problème de définition de ces suites.

Or nous remarquons que les premiers termes des deux suites sont strictement positifs et les opérations faites permettent de conserver cette propriété. Nous allons montrer par récurrence que tous les termes sont strictement positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : a_n \text{ et } b_n \text{ existent et } a_n > 0, b_n > 0$$

(I) : a_0 et b_0 existent et sont strictement positifs donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

(H) : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$a_n > 0$ et $b_n > 0$ donc $a_n b_n > 0$. Donc $\sqrt{a_n b_n}$ **existe** et $\sqrt{a_n b_n} > 0$.

De plus, par somme et multiplication par $\frac{1}{2}$, $\frac{a_n + b_n}{2} > 0$.

On en déduit que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

(C) : Ainsi, d'après le principe de récurrence, les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies, à termes strictement positifs.

2.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{a_n}^2 + \sqrt{b_n}^2 - 2\sqrt{a_n} \sqrt{b_n}}{2} \text{ car } a_n > 0 \text{ et } b_n > 0 \text{ donc } a_n = \sqrt{a_n}^2 \text{ et } b_n = \sqrt{b_n}^2 \\ &= \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

3. On déduit de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \geq a_n$. De plus, $b_0 \geq a_0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq a_n$.

Montrons que (a_n) est croissante

Puisque (a_n) est à terme strictement positifs, il suffit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{a_n b_n}}{a_n} \\ &= \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \geq 1 \text{ car } 0 < a_n < b_n \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Donc la suite (a_n) est croissante.

Montrons que (b_n) est décroissante

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n &= \frac{a_n + b_n}{2} - b_n \\ &= \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0 \text{ car } a_n < b_n \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n \leq 0$. Donc la suite (b_n) est décroissante.

4. (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et d'après la question 2, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$$

On en déduit :

(a_n) est croissante, majorée (par b_0). Donc, d'après le théorème de la limite monotone, (a_n) est convergente.

(b_n) est décroissante, minorée (par a_0). Donc, d'après le théorème de la limite monotone, (b_n) est convergente.

5. Nous savons déjà que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

Pour montrer que les suites sont adjacentes, il suffit de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$.

Nous savons que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes. Notons ℓ la limite de (a_n) et ℓ' la limite de (b_n) .

Par définition de ces suites, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \ell'$ (c'est la même limite que celle de la suite (b_n)),

et par opérations sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\ell + \ell'}{2}$.

On en déduit : $\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}$, d'où $2\ell' = \ell + \ell'$, donc $\ell' = \ell$.

Ainsi, par opérations sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$ (c'est $\ell' - \ell$).

Conclusion : la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) est décroissante, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$. Donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.