

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 17. SUJET A.

Vendredi 20 février 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sin(2x) - 2\sin(x)$

$$\sin(y) \underset{0}{=} y - \frac{y^3}{6} + o(y^3) \quad \text{donc par substitution, } \sin(2x) \underset{0}{=} 2x - \frac{(2x)^3}{6} + \underbrace{o((2x)^3)}_{o(8x^3)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$$

$$\text{donc } \sin(2x) \underset{0}{=} 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

Par combinaison linéaire des DL, on en déduit :

$$\sin(2x) - 2\sin(x) \underset{0}{=} -x^3 + o(x^3)$$

Exercice 2

Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{2-x}$

$$\sqrt{2-x} = \sqrt{2(1-\frac{x}{2})} = \sqrt{2} \times \sqrt{1-\frac{x}{2}}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1+y} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2) \\ \lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{x}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc par substitution, } \sqrt{1-\frac{x}{2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}(-\frac{x}{2}) - \frac{1}{8}(-\frac{x}{2})^2 + \underbrace{o((- \frac{x}{2})^2)}_{o(\frac{1}{4}x^2)} \\ o(x^2)$$

$$\text{Ainsi, } \sqrt{1-\frac{x}{2}} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} + o(x^2)$$

D'où (par combinaison linéaire des DL)

$$\sqrt{2-x} \underset{0}{=} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{32}x^2 + o(x^2)$$

Exercice 3

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto e^x - \cos(x) - x$.
2. En déduire la limite quand x tend vers 0 de $x \mapsto \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2}$

$$\textcircled{1} \begin{cases} e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{cases}$$

Par combinaison linéaire des DL, $e^x - \cos(x) - x \underset{0}{=} x^2 + o(x^2)$

$\textcircled{2}$ On a établi :

$$e^x - \cos(x) - x \underset{0}{=} x^2 + o(x^2)$$

On multiplie par $\frac{1}{x^2}$:

$$\frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} \underset{0}{=} 1 + o(1)$$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} = 1$$

Autre méthode :

$$\text{On a établi : } e^x - \cos(x) - x \underset{0}{=} x^2 + o(x^2)$$

Ce DL est non-nul. On en déduit un équivalent (le 1er terme non-nul du DL) :

$$e^x - \cos(x) - x \underset{0}{\sim} x^2$$

Et par quotient des équivalents (" $x^2 \underset{0}{\sim} x^2$ ") :

$$\frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} \underset{0}{\sim} 1$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} = 1$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 16. SUJET B.

Vendredi 20 février 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+2x) - 2\ln(1+x)$

$$\ln(1+y) \underset{0}{=} y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3) \quad \left. \begin{array}{l} \text{donc par substitution,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0 \end{array} \right\} \ln(1+2x) \underset{0}{=} 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + \underbrace{o((2x)^3)}_{o(x^3)}$$

$$\text{donc } \ln(1+2x) \underset{0}{=} 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

Et par combinaison linéaire des DL,

$$\ln(1+2x) - 2\ln(1+x) \underset{0}{=} -x^2 + 2x^3 + o(x^3)$$

Exercice 2

Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{3+x}$

$$\sqrt{3+x} = \sqrt{3\left(1+\frac{x}{3}\right)} = \sqrt{3} \times \sqrt{1+\frac{x}{3}}$$

$$\sqrt{1+y} \underset{0}{=} 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{donc par substitution :} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0 \end{array} \right\} \sqrt{1+\frac{x}{3}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \underbrace{o\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)}_{o\left(\frac{1}{9}x^2\right)}_{o(x^2)}$$

$$\text{donc } \sqrt{1+\frac{x}{3}} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{72} + o(x^2)$$

et par combinaison linéaire (multiplication par $\sqrt{3}$):

$$\sqrt{3+x} \underset{0}{=} \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{72}x^2 + o(x^2)$$

Exercice 3

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \cos(x) - e^x + x$.
2. En déduire la limite quand x tend vers 0 de $x \mapsto \frac{\cos(x) - e^x + x}{x^2}$

① $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

donc par combinaison linéaire des développements limités,

$$\cos(x) - e^x + x \underset{0}{=} -x^2 + o(x^2)$$

② On a établi : $\cos(x) - e^x + x \underset{0}{=} -x^2 + o(x^2)$

On multiplie par $\frac{1}{x^2}$:

$$\frac{\cos(x) - e^x + x}{x^2} \underset{0}{=} -1 + o(1)$$

On en déduit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^x + x}{x^2} = -1$$

Autre méthode: on a établi : $\cos(x) - e^x + x \underset{0}{=} -x^2 + o(x^2)$

Ce DL est non-nul, on en déduit un équivalent (c'est le premier terme non-nul du DL) :

$$\cos(x) - e^x + x \underset{0}{\sim} -x^2$$

D'où, par quotient des équivalents :

$$\frac{\cos(x) - e^x + x}{x^2} \underset{0}{\sim} -1$$

On en déduit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^x + x}{x^2} = -1$$