

3.2.2 Variance, écart type

Définition 12 Soit X une VAR sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

• On appelle **variance** de X le moment centré d'ordre 2 de X . On note $V(X)$ la variance de X . Ainsi,

$$V(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - E(X))^2 P(X = k).$$

• On appelle **écart type** de X la quantité $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Remarques :

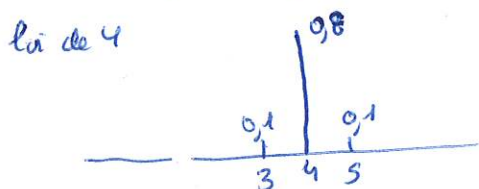
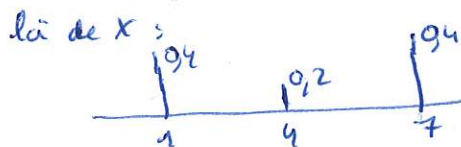
• L'écart type est bien défini car

• $V(X) = 0$ si, et seulement si ...

• D'après le théorème de transfert, $V(X) = E((X - E(X))^2)$. (14)

• La variance et l'écart type mesurent la dispersion de la VAR X autour de son espérance (moyenne). Plus ils sont petits, plus la VAR est concentrée autour de son espérance.

Exemples :



$$X(\Omega) = \{1, 4, 7\}$$

$$E(X) = 1 \times P(X=1) + 4 \times P(X=4) + 7 \times P(X=7)$$

$$= 1 \times 0.4 + 4 \times 0.2 + 7 \times 0.4 = 4$$

$$V(X) = (1 - E(X))^2 P(X=1) + (4 - E(X))^2 P(X=4) + (7 - E(X))^2 P(X=7)$$

$$= 3^2 P(X=1) + 3^2 P(X=7) = 9 \times 0.4 + 9 \times 0.4 = 7.2$$

donc $V(X) = 7.2$

$$Y(\Omega) = \{3, 4, 5\}$$

$$E(Y) = 3 \times P(Y=3) + 4 \times P(Y=4) + 5 \times P(Y=5)$$

$$= 3 \times 0.1 + 4 \times 0.8 + 5 \times 0.1 = 4$$

$$V(Y) = (3 - E(Y))^2 P(Y=3) + (4 - E(Y))^2 P(Y=4) + (5 - E(Y))^2 P(Y=5)$$

$$= 1^2 P(Y=3) + 0 + 1^2 P(Y=5)$$

$$= 0.1 + 0.1 = 0.2$$

donc $V(Y) = 0.2$

Proposition 5 Soit X une VAR sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Soient a et b deux réels. On a :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Par définition, $V(aX + b) = E((aX + b - E(aX + b))^2)$ (th. de transfert, voir remarque (14))

$$\text{Or } aX + b - E(aX + b) = aX + b - (E(X) + b) \leftarrow \text{par linéarité de l'espérance}$$

$$= aX + b - aE(X) - b$$

$$= a(X - E(X))$$

$$\text{donc } V(aX + b) = E(a^2 (X - E(X))^2)$$

$$= a^2 E(\underbrace{(X - E(X))^2}_{V(X)}) \leftarrow \text{par linéarité de l'espérance}$$