

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 18. SUJET A.

Vendredi 20 mars 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice

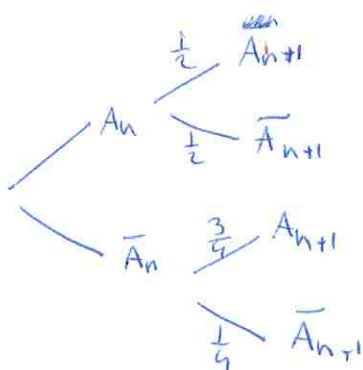
Un archer s'entraîne au tir à l'arc. Il a remarqué que lors de ses entraînements :

- La première flèche tirée a une chance sur 3 d'atteindre la cible.
- Si, lors d'un tir, la flèche atteint la cible, alors au tir suivant, la flèche atteint la cible avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si, lors d'un tir, la flèche n'atteint pas la cible, alors au tir suivant, la flèche atteint la cible avec probabilité $\frac{3}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement "La flèche atteint la cible lors du $n^{\text{ième}}$ tir", et p_n la probabilité de A_n .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(A_{n+1})$ à l'aide de $P(A_n)$ et $P(\bar{A}_n)$. On justifiera précisément la formule utilisée.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}$.
3. En déduire p_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.
5. Déterminer la probabilité que les 10 premières flèches atteignent la cible. On justifiera précisément la formule utilisée.

①



On applique la formule des probabilités totales avec le système complet $(A_n, \bar{A}_n)$, vérifiant $P(A_n) \neq 0$ et $P(\bar{A}_n) \neq 0$:

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \underbrace{P(A_{n+1}|A_n)}_{\frac{1}{2}} + P(\bar{A}_n) \underbrace{P(A_{n+1}|\bar{A}_n)}_{\frac{3}{4}}$$

Donc $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2} P(A_n) + \frac{3}{4} P(\bar{A}_n)$

② Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(\bar{A}_n) = 1 - P(A_n)$, on déduit de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{P(A_{n+1})}_{p_{n+1}} = \frac{1}{2} P(A_n) + \frac{3}{4} (1 - P(A_n)) = \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)}_{-\frac{1}{4}} P(A_n) + \frac{3}{4}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}$

③ $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmético géométrique

On cherche $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = -\frac{1}{4}l + \frac{3}{4}$

$$l = -\frac{1}{4}l + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{4}l = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{3}{5}$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4} & (1) \\ \frac{3}{5} = -\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} & (2) \end{cases}$$

$$\text{donc } ((1) - (2)) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4} \left(p_n - \frac{3}{5} \right)$$

$$\text{On pose } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = p_n - \frac{3}{5}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_{n+1} = -\frac{1}{4}q_n$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} q_1, \quad \text{avec } q_1 = p_1 - \frac{3}{5} = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{5-9}{15} = -\frac{4}{15}$$

$$\text{donc } q_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{4}{15}\right) = \frac{1}{15} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}}$$

$$\textcircled{4} \quad \left| -\frac{1}{4} \right| < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} = 0, \text{ donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{5}}$$

⑤ On cherche $P(A_1 \cap \dots \cap A_{10})$

$P(A_1 \cap \dots \cap A_9)$ car il est possible que les 9 premières flèches atteignent la cible.

Donc d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_{10}) &= \underbrace{P(A_1)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{P_{A_1}(A_2)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{P_{A_1 \cap A_2}(A_3)}_{\frac{1}{2} \uparrow \text{ c'est } P_{A_2}(A_3)} \dots \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_9}(A_{10})}_{\frac{1}{2} \uparrow \text{ c'est } P_{A_9}(A_{10})} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \end{aligned}$$

La probabilité que les 10 premières flèches atteignent la cible est de $\frac{1}{3} \frac{1}{2^9}$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 18. SUJET B.

Vendredi 20 mars 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice

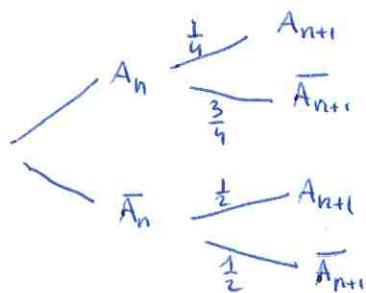
Un archer s'entraîne au tir à l'arc. Il a remarqué que lors de ses entraînements :

- La première flèche tirée a une chance sur 4 d'atteindre la cible.
- Si, lors d'un tir, la flèche atteint la cible, alors au tir suivant, la flèche atteint la cible avec probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si, lors d'un tir, la flèche n'atteint pas la cible, alors au tir suivant, la flèche atteint la cible avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement "La flèche atteint la cible lors du $n^{\text{ième}}$ tir", et p_n la probabilité de A_n .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(A_{n+1})$ à l'aide de $P(A_n)$ et $P(\bar{A}_n)$. On justifiera précisément la formule utilisée.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
3. En déduire p_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.
5. Déterminer la probabilité que les 10 premières flèches atteignent la cible. On justifiera précisément la formule utilisée.

①



On applique la formule des probabilités totales avec le système complet $(A_n, \bar{A}_n)$, vérifiant $P(A_n) \neq 0$ et $P(\bar{A}_n) \neq 0$:

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \underbrace{P_{A_n}(A_{n+1})}_{\frac{1}{4}} + P(\bar{A}_n) \underbrace{P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})}_{\frac{1}{2}}$$

Donc $\boxed{P(A_{n+1}) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{2}P(\bar{A}_n)}$

② Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(\bar{A}_n) = 1 - P(A_n)$, on déduit de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{P(A_{n+1})}_{p_{n+1}} = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{2}(1 - P(A_n)) = \underbrace{(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})}_{-\frac{1}{4}} \underbrace{P(A_n)}_{p_n} + \frac{1}{2}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$

③ La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.

On cherche $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = -\frac{1}{4}l + \frac{1}{2}$

$$l = -\frac{1}{4}l + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{4}l = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}l = 1$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{2}{5}$$

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} & (1) \\ \frac{2}{5} = -\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$\text{On déduit } ((1) - (2)) : \forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}(p_n - \frac{2}{5}) \quad (*)$$

$$\text{On pose } \forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = p_n - \frac{2}{5}$$

D'après (*), la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{4}$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = q_1 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \text{ avec } q_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = -\frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$\textcircled{4} \quad \left| -\frac{1}{4} \right| < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0, \text{ donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{5}}$$

⑤ On cherche $P(A_1 \cap \dots \cap A_{10})$

$P(A_1 \cap \dots \cap A_9) \neq 0$ car il est possible que les 9 premières flèches atteignent leur cible.

Donc d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_{10}) &= \underbrace{P(A_1)}_{\frac{1}{4}} \underbrace{P(A_2)}_{\frac{1}{4}} \underbrace{P(A_1 \cap A_2)}_{\frac{1}{4}} \dots \underbrace{P(A_{10})}_{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{4^{10}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité que les 10 premières flèches atteignent la cible est } \frac{1}{4^{10}}}$