

CONTINUITÉ.

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes :

- indiquer son ensemble de définition
- indiquer si elle est prolongeable par continuité au point précisé.

Indication : dans certains cas, il pourra être judicieux de faire un développement limité du numérateur.

$$f : x \mapsto x \ln(2x) \text{ en } 0.$$

$$g : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)} \text{ en } 0.$$

$$h : x \mapsto \frac{\ln x}{x} \text{ en } 0.$$

$$i : x \mapsto \frac{e^x + \cos(x) - 2 - x}{x^2} \text{ en } 0 \quad j : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \ln(1 + \frac{x}{2})}{x^2} \text{ en } 0 \quad k : x \mapsto \frac{\sin(x) - x}{x^3} \text{ en } 0.$$

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles continues ? Déterminer les points où elles sont discontinues. Indiquer, en ces points, s'il y a continuité à droite ou continuité à gauche.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ -\frac{1}{xe^x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1, \\ 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\lfloor \frac{3}{2} + \frac{\cos x}{4} \right\rfloor$$

Exercice 3.

1. Rappeler l'ensemble de définition et le tableau de variations de la fonction arctangente et tracer l'allure de son graphe.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$. Déterminer l'ensemble de définition de h et calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
3. h est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 4. (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(I) \subset \{0, 1\}$. Montrer que f est constante.

Indication : on pourra essayer de représenter f par un dessin.

Exercice 5. On pose $I =]0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction :

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \ln x - n$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Établir le tableau de variation de f_n .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n appartenant à I tel que $f_n(x_n) = 0$.
Indication : il faut être très rigoureux sur cette question : dans un premier temps, appliquer le théorème de la bijection. Dans un second temps, utiliser la définition d'une bijection : tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent.
3. Étudier la monotonie de la suite (x_n) . Indication : exprimer $f_n(x_{n+1})$ et trouver son signe.

- Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = e^{x_n} e^{-n}$ et en déduire un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -x^2 + x \ln x + 2$.

- Justifier que f est continue.
- Dresser le tableau de variation de f (on pourra calculer les dérivées f' et f''). Préciser les limites en 0 et $+\infty$.
- Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
- Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque f^{-1} . Indiquer les limites.
- Justifier que pour tout entier naturel k , il existe un unique réel strictement positif x_k tel que $f(x_k) = -k$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, x_k avec f^{-1} .
- Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et déterminer sa limite quand k tend vers $+\infty$.
- Déterminer un équivalent de x_k quand k tend vers $+\infty$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \frac{x}{2^n}$. Exprimer de deux façons la limite de la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire que $f(x) = f(0)$.
- Conclure.

Exercice 8. Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue nulle-part

Soit $\chi_{\mathbb{Q}}$ la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

($\chi_{\mathbb{Q}}$ est la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$).

- Donner l'allure du graphe de $\chi_{\mathbb{Q}}$.
- Pour tout entier naturel non-nul n , on définit $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\chi_{\mathbb{Q}}(u_n)$ et $\chi_{\mathbb{Q}}(v_n)$.
- Les suites (u_n) , (v_n) , $(\chi_{\mathbb{Q}}(u_n))$ et $(\chi_{\mathbb{Q}}(v_n))$ ont-elles une limite quand n tend vers $+\infty$? Si oui, la déterminer.
- En déduire que la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en 0.
- Montrer que $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.