

### Exercice 1

Un dé équilibré a une face numérotée 1, deux faces numérotées 2 et trois faces numérotées 3. On lance une fois le dé. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre obtenu.

1. Déterminer l'univers  $\Omega$ . La probabilité sur  $\Omega$  est-elle uniforme?
2. Déterminer la loi de  $X$ .
3. Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

### Exercice 2

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient 10 boules, numérotées de 1 à 10. On en choisit une au hasard. On note  $X_1$  la variable égale au numéro sorti.

Pour tout  $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ , si on a tiré la boule  $i$ , on la remet dans l'urne et toutes les boules de l'urne portant un numéro  $< i$  sont remplacées par des boules  $n^\circ i$ .

On recommence ainsi  $n$  tirages dans les mêmes conditions. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_k$  est la variable aléatoire égale au numéro sorti au  $k$ -ième tirage.

1. Exemple :
  - (a) Si  $X_1 = 7$ , quelle est la composition de l'urne à l'issue du premier tirage?
  - (b) Déterminer, pour tout  $k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}_{(X_1=7)}(X_2 = k)$ .
  - (c) Si  $X_2 = 9$ , quelle est la composition de l'urne à l'issue du 2ème tirage?
2. Informatique
  - (a) Écrire une fonction python `remplace(L, x)` qui prend en entrée une liste  $L$  de 10 entiers, et un entier  $x$ , et qui modifie la liste  $L$  en remplaçant tous les éléments inférieurs à  $x$  par  $x$ .  
Cette fonction ne renvoie rien mais modifie la liste  $L$ .
  - (b) Écrire une fonction python  $X_n(n)$  qui prend en entrée un entier naturel  $n \geq 2$  et qui renvoie la variable aléatoire  $X_n$ . On pourra utiliser la fonction `remplace`.  
**Indication :** On pourra utiliser la commande `choice` (du module `random`) : si  $L$  est une liste, `choice(L)` renvoie un élément tiré au hasard dans la liste  $L$  (sans modifier la liste  $L$ ).
3. Quelle est la loi de  $X_1$ ?
4. Déterminer, pour tout  $(i, k) \in \llbracket 1, 10 \rrbracket^2$ , la probabilité  $\mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = k)$ .
5. En déduire la loi de  $X_2$ . On pourra appliquer la formule des probabilités totales avec un système complet bien choisi.
6. Calculer  $\mathbb{P}_{(X_{n-1}=1)}(X_n = 1)$ .
7. En déduire  $\mathbb{P}(X_n = 1)$  en fonction de  $\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)$ ,
8. puis :  $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{10^n}$ .
9. Montrer précisément que pour tout  $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(X_n \leq i) = \left(\frac{i}{10}\right)^n$ .
10. En déduire la valeur de  $\mathbb{P}(X_n = i)$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ .  
**Indication :** On pourra remarquer que  $(X_n \leq i-1) \cup (X_n = i) = (X_n \leq i)$  et justifier rigoureusement la formule qu'on en déduit quant aux probabilités de ces événements.

### Exercice 3.

Un professeur envoie  $n$  invitations à des anciens élèves pour un carrefour des métiers. Chaque ancien élève lui répond avec une probabilité  $p$ . Il fait un deuxième envoi à ceux qui n'ont pas répondu la première fois. De nouveau, chaque élève sollicité lui répond avec probabilité  $p \in ]0; 1[$ .

1. Soit  $Y$  le nombre de réponses au premier envoi et  $Z$  le nombre de réponses au deuxième envoi.
  - (a) Déterminer la loi de  $Y$ .
  - (b) Donner l'espérance et la variance de  $Y$ .
  - (c) Déterminer  $Z(\Omega)$ .
  - (d) Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , déterminer la loi conditionnelle de  $Z$  sachant ( $Y = i$ ). On notera  $Z_{(Y=i)}$  la variable aléatoire " $Z$  sachant ( $Y = i$ )".  
Indication :  $Z_{(Y=i)}$  suit une loi usuelle.
  - (e) En déduire, pour tous  $(i, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ ,  $P_{(Y=i)}(Z = k)$ .
2. Soit  $X = Y + Z$  le nombre total de réponses.
  - (a) *Question préliminaire* : Montrer que, pour tout  $(i, k, n) \in \mathbb{N}^3$  tel que  $0 \leq i \leq k \leq n$ ,

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k} \binom{k}{i}.$$

- (b) Calculer  $P(X = 0)$  et  $P(X = 1)$ .
- (c) Déterminer la loi de  $X$ .  
Indication : On pourra reconnaître une loi usuelle .
- (d) Déterminer l'espérance de  $X$ .
- (e) Déterminer la variance de  $X$ .