Corrigé du devoir maison n° 8

— —

Exercice 1.

1. $\boxed{\Omega = \{1, 2, 3\}}$. La probabilité sur Ω n'est pas uniforme car les résultats ne sont pas équiprobables. Par exemple, $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(\{2\}) = \frac{2}{6} \neq \mathbb{P}(\{1\})$.

2. Loi de X : $\boxed{X(\Omega) = \{1, 2, 3\} \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6},\ \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{6},\ \mathbb{P}(X = 3) = \frac{3}{6}.}$

3. On trouve : $E(X) = \frac{7}{3}$. On calcule la variance à l'aide de la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Or $E(X^2) = 6$ (calculé par le théorème de transfert), d'où $V(X) = 6 - (\frac{7}{3})^2 = \frac{5}{9}$. Ainsi, $\boxed{E(X) = \frac{7}{3} \text{ et } V(X) = \frac{5}{9}}$.

Exercice 2.

1. Exemple :

   (a) Si $X_1 = 7$, alors la composition de l'urne à l'issue du premier tirage est $\boxed{7{,}7{,}7{,}7{,}7{,}7{,}7{,}8{,}9{,}10}$.

   (b) Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}_{(X_1=7)}(X_2 = k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k < 7 \\ \frac{7}{10} \text{ si } k = 7 \\ \frac{1}{10} \text{ si } k \geqslant 8 \end{cases}}$

   (c) Si $X_2 = 9$, alors la composition de l'urne à l'issue du deuxième tirage est $\boxed{9{,}9{,}9{,}9{,}9{,}9{,}9{,}9{,}9{,}10}$.

2. Informatique

   (a)
```python
def remplace(L,x):
    n = len(L)
    for i in range(n):
        if L[i] < x:
            L[i] = x
```
   Cette fonction ne renvoie rien (pas de `return`) mais modifie la liste `L`.
   Si on tape dans le shell :
```python
>>> L = [ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
>>> remplace(L,8)
```
   rien ne s'affiche mais :
```python
>>> print(L)
```
   donne :
```
[8,8,8,8,8,8,8,8,9,10]
```
   (b)
```python
def Xn(n):
    L = [j for j in range(1,11)]
    for i in range(n-1):
        x = choice(L)
        remplace(L,x)
    x = choice(L)
    return x
```

3. Le tirage a lieu au hasard et les 10 boules sont numérotées de 1 à 10 donc $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 10]\!])}$.

4. Soit $(i,k) \in [\![1,10]\!]^2$ fixé quelconque.
Si l'évènement $(X_1 = i)$ est réalisé, alors la composition de l'urne est :
$$\underbrace{i, i...i}_{i \text{ numéros}}, (i+1), ...10$$
Donc $\boxed{\mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k < i \\ \frac{i}{10} \text{ si } k = i \\ \frac{1}{10} \text{ si } k \geqslant i+1 \end{cases}}$

5. Loi de X_2 :
• $X_2(\Omega) = [\![1,10]\!]$,
• Soit $k \in [\![1,10]\!]$ fixé quelconque.
Calculons $\mathbb{P}(X_2 = k)$ par la formule des probabilités totales avec le système complet $((X_1 = i))_{1 \leqslant i \leqslant 10}$, en remarquant au préalable que $\forall i \in [\![1,10]\!]$, $P(X_1 = i) \neq 0$ (on va donc pouvoir appliquer la version qui utilise des probabilités conditionnelles) :
$\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum\limits_{i=1}^{10} \mathbb{P}(X_1 = i) \underbrace{\mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = k)}_{=0 \text{ si } k<i}$. Nous allons couper cette somme en trois :
$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{k-1}}_{k-1 \text{ termes}} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = i)}_{=\frac{1}{10}} \underbrace{\mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = k)}_{=\frac{1}{10} \text{ car } k>i} \right] + \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = k)}_{=\frac{1}{10}} \underbrace{\mathbb{P}_{(X_1=k)}(X_2 = k)}_{=\frac{k}{10}} + \left[\sum_{i=k+1}^{10} \mathbb{P}(X_1 = i) \underbrace{\mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = k}_{=0 \text{ car } k<i}\right.$$
D'où $\mathbb{P}(X_2 = k) = \dfrac{k-1}{100} + \dfrac{k}{100} = \dfrac{2k-1}{100}$.
Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![1,10]\!],\ \mathbb{P}(X_2 = k) = \dfrac{2k-1}{100}}$.

6. Si l'évènement (X_{n-1}) est réalisé, alors la composition de l'urne à l'issue du $(n-1)$ème tirage est la même que la composition initiale : 1,2,3,4...,10.
Donc $\boxed{\mathbb{P}_{(X_{n-1}=1)}(X_n = 1) = \frac{1}{10}}$.

7. On remarque que $(X_n = 1) \subset (X_{n-1} = 1)$. Donc $(X_n = 1) = (X_n = 1) \cap (X_{n-1} = 1)$.
Or d'après la formule des probabilités composées (c'est aussi par définition de la probabilité conditionnée par l'évènement $(X_{n-1} = 1)$), $\mathbb{P}((X_n = 1) \cap (X_{n-1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\mathbb{P}_{(X_{n-1}=1)}(X_n = 1)$.
Ainsi, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) \underbrace{\mathbb{P}_{(X_{n-1}=1)}(X_n = 1)}_{=\frac{1}{10} \text{ d'après 6.}}$.
D'où $\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{10}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)}$.

8. L'égalité établie précédemment est valable pour n entier $\geqslant 2$ fixé quelconque, donc elle est valable pour tout entier $n \geqslant 2$. Donc la suite $(\mathbb{P}(X_n = 1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$.
Ainsi, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$. Or $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{10}$, d'où $\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{10^n}}$.

9. Soit $i \in [\![1,10]\!]$ fixé quelconque. L'évènement $(X_n \leqslant i)$ implique $(X_{n-1} \leqslant i)$, qui implique $(X_{n-2} \leqslant i)$ et ainsi de suite. Ceci s'écrit : $(X_n \leqslant i) \subset (X_{n-1} \leqslant i) \subset (X_{n-2} \leqslant i) ... \subset (X_1 \leqslant i)$.
Donc $(X_n \leqslant i) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \leqslant i)$.
Or, d'après la formule des probabilités composées,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant i\right) = \underbrace{\underbrace{\mathbb{P}((X_1 \leqslant i)}_{=\frac{i}{n}} \underbrace{\mathbb{P}_{(X_1 \leqslant i)}((X_2 \leqslant i))}_{=\frac{i}{n}} \underbrace{\mathbb{P}_{(X_1 \leqslant i) \cap (X_2 \leqslant i)}(X_3 \leqslant i)}_{=\frac{i}{n}} ... \underbrace{\mathbb{P}_{(X_1 \leqslant i) \cap ... (X_{n-1} \leqslant i)(X_n \leqslant i)}}_{=\frac{i}{n}}}_{n \text{ facteurs tous égaux à } \frac{i}{n}}.$$
D'où $\boxed{\mathbb{P}(X_n \leqslant i) = (\dfrac{i}{10})^n}$.

10. Soit $i \in [\![1,10]\!]$ fixé quelconque.
$\underbrace{(X_n \leqslant i-1) \cup (X_n = i)}_{\text{ces évènements sont incompatibles}} = (X_n \leqslant i)$.
Donc $\mathbb{P}(X_n \leqslant i-1) + \mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{P}(X_n \leqslant i)$. Donc $\mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{P}(X_n \leqslant i) - \mathbb{P}(X_n \leqslant i-1)$. Ainsi, d'après la question précédente : $\boxed{\mathbb{P}(X_n = i) = \left(\frac{i}{10}\right)^n - \left(\frac{i-1}{10}\right)^n}$

Exercice 3.

1. (a) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on peut noter X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le $i-$ème élève répond et 0 sinon.
   On a donc $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec les $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ sont indépendantes. Donc $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$.
   Pour le reste du problème, on a donc, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(Y = i) > 0$.

   (b) $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

   (c) La variable Z peut valoir 0 si aucun élève ne répond au deuxième appel. Elle peut également valoir n si aucun élève n'a répondu au premier appel et qu'ils répondent tous au deuxième.
   Finalement, $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

   (d) Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, sachant $Y = i$ veut dire que $n-i$ élèves n'ont pas répondu et que le professeur les relance de façon indépendante.
   Finalement, $Z_{Y=i}$ suit une loi binomiale de paramètre $n-i$ et p.

   (e) Soit $(i,k) \in [\![0,n]\!]^2$.
   $\mathbb{P}_{(Y=i)}(Z = k) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in [\![0, n-i]\!], \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

2. (a) Soit $(i,k,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leq i \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \frac{n!(n-i)!}{i!(n-i)!(k-i)!(n-k)!} = \frac{n!k!}{k!(n-k)!i!(k-i)!} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}.$$

   (b) On a :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}((Y = 0) \cap (Z = 0)) = \mathbb{P}(Y = 0)\mathbb{P}_{(Y=0)}(Z = 0) = (1-p)^n(1-p)^n = (1-p)^{2n}$$

   et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}\left(((Y = 1) \cap (Z = 0)) \cup ((Y = 0) \cap (Z = 1))\right) \\
&= \mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}_{(Y=1)}(Z = 0) + \mathbb{P}(Y = 0)\mathbb{P}_{(Y=0)}(Z = 1) \\
&= \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1}(1-p)^{n-1} + (1-p)^n \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} \\
&= (2-p)\, np(1-p)^{2(n-1)} .
\end{aligned}$$

   (c) On a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
   Soit $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{k} (Y = i) \cap (Z = k-i)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}_{(Y=i)}(Z = k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-i-(k-i)} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (1-p)^{k-i} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} (2-p)^k \\
&= \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k} .
\end{aligned}$$

   Donc $X \sim \mathcal{B}(n, p(2-p))$.

   (d) On a donc que $E(X) = np(2-p)$.

   (e) Par ailleurs, $V(X) = np(2-p)(1-p)^2$.