NOM : CORRIGÉ

BCPST 12
Interrogation écrite numéro 20.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 20 - SUJET A - VENDREDI 3 AVRIL 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, déterminer le prolongement.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} 1+2x > 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$ (pour que $\ln(1+2x)$ existe)

$\iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$

Donc $\mathcal{D}_f =]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[$

2) $\begin{cases} \ln(1+y) \underset{0}{=} y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \\ \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0 \end{cases}$ donc par substitution,

$\ln(1+2x) \underset{0}{=} 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + \underbrace{o((2x)^2)}_{\substack{o(4x^2) \\ \text{c'est } o(x^2)}}$

donc $\ln(1+2x) \underset{0}{=} 2x - 2x^2 + o(x^2)$

Ainsi, $\ln(1+2x) - 2x \underset{0}{=} -2x^2 + o(x^2)$ $\times \frac{1}{x^2}$

donc $\dfrac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} \underset{0}{=} -2 + o(1)$

On en déduit $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} = -2$

Cette limite existe et elle est finie, donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$\tilde{f} :]-\tfrac{1}{2}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
- On tire une boule dans cette urne et on note X le numéro de cette boule.
- Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, si le numéro de cette boule est k, on remplace chaque boule de numéro inférieur ou égal à k par une boule de numéro k.
- On retire ensuite une boule dans l'urne ainsi constituée. On note Y le numéro de la boule obtenue.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer $Y(\Omega)$, puis, pour tout $(k,i) \in [\![1,n]\!]^2$, $P_{(X=k)}(Y=i)$.
3. En déduire la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(1) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Plus précisément : $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k)=\frac{1}{n}$

(2) Soient $(k,i) \in [\![1,n]\!]^2$ fixés quelconques. et $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$

$$P_{(X=k)}(Y=i)=\begin{cases} 0 & \text{si } i<k \\ \frac{k}{n} & \text{si } i=k \quad (\text{c'est } \frac{i}{n}) \\ \frac{1}{n} & \text{si } i>k \end{cases}$$

(3) On a vu que $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$.

⚠ conseil : choisir les mêmes lettres qu'à la question précédente

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ fixé quelconque.
Nous allons calculer $P(Y=i)$ par la formule des probabilités totales, avec le système complet $((X=k))_{1\le k\le n}$ vérifiant $\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k)\neq 0$

Rq : Pour toute VAR X, on a un système complet qui est $(X=k)_{k\in X(\Omega)}$

$$P(Y=i)=\sum_{k=1}^{n} P(X=k)\underbrace{P_{(X=k)}(Y=i)}_{\text{établi à la q°2}}$$

vaut 0 si $i<k$
↳ on va couper la somme en 3 :

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{i-1}\underbrace{P(X=k)}_{\frac{1}{n}}\underbrace{P_{(X=k)}(Y=i)}_{\frac{1}{n}\text{ car } k<i \text{ (d'après (2))}}}_{i-1 \text{ termes ne dépendant pas de } k} + \underbrace{P(X=i)}_{\frac{1}{n}}\underbrace{P_{(X=i)}(Y=i)}_{\frac{i}{n}\text{ d'après (2)}} + \sum_{k=i+1}^{n} P(X=k)\underbrace{P_{(X=k)}(Y=i)}_{0 \text{ d'après (2)}}$$

surtout pas "$\frac{k}{n}$" car k n'a aucun sens s'il n'est pas derrière "$\sum_k$"

$$=(i-1)\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times\frac{i}{n}=\frac{2i-1}{n^2}$$

Donc $\boxed{P(Y=i)=\frac{2i-1}{n^2}}$

(4) $\underbrace{P(X=2\cap Y=1)}_{0} \neq \underbrace{P(X=2)}_{\frac{1}{n}}\underbrace{P(Y=1)}_{\frac{1}{n^2}\text{ (d'après q°3)}}$ donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

CORRIGÉ

NOM :

BCPST 12
Interrogation écrite numéro 20.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 20 - SUJET B - VENDREDI 3 AVRIL 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

exercice 1
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+3x) - 3x}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, déterminer le prolongement.

① Soit $x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} 1+3x > 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$ (pour que $\ln(1+3x)$ existe)

$\iff \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x \neq 0 \end{cases}$

Donc $\mathcal{D}_f = \left]-\frac{1}{3}, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

② $\begin{cases} \ln(1+y) \underset{0}{=} y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \\ \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0 \end{cases}$ donc par substitution,

$\ln(1+3x) \underset{0}{=} 3x - \frac{1}{2}(3x)^2 + \underbrace{o\left((3x)^2\right)}_{o(9x^2)}$

c'est $o(x^2)$

donc $\ln(1+3x) \underset{0}{=} 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$

ainsi, $\ln(1+3x) - 3x \underset{0}{=} -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$ $\times \frac{1}{x^2}$

donc $\dfrac{\ln(1+3x)-3x}{x^2} \underset{0}{=} -\frac{9}{2} + o(1)$

On en déduit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)-3x}{x^2} = -\frac{9}{2}$

Cette limite existe et elle est finie, donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$\tilde{f} : \left]-\tfrac{1}{3}, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+3x)-3x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\dfrac{9}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

- On tire une boule dans cette urne et on note X le numéro de cette boule.

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, si le numéro de cette boule est i, on remplace chaque boule de numéro inférieur ou égal à i par une boule de numéro i.

- On retire ensuite une boule dans l'urne ainsi constituée. On note Y le numéro de la boule obtenue.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer $Y(\Omega)$, puis, pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$, $P_{(X=i)}(Y = k)$.
3. En déduire la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

voir sujet A.
Les questions sont les mêmes, on a juste inversé i et k dans les énoncés.