DS 6 - Quelques erreurs fréquentes.

<u>Ex2</u>

$f(x) \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$

* L'équation de la tangente en $x=0$ ~~est~~ le développement limité d'ordre 1 donnée par

C'est $\mathcal{T} : y = 1 - x$ ⚠ le $DL_1(0)$ n'est pas une équation !

* $f(x) - (1-x) \underset{0}{=} -x^2 + o(x^3)$ ce DL est non-nul, on en déduit :

$f(x) - (1-x) \underset{0}{\sim} -x^2$

Or $-x^2 < 0$ donc $f(x) - (1-x) < 0$ au $V(0)$ $\leqslant$

c'est une inégalité large : $-x^2 \leqslant 0$

donc $f(x) < 1 - x$ au $V(0)$

donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{T}$ au $V(0)$

⚠ cette étude n'est valable qu'au voisinage de 0

Problème : * $f : x \longmapsto \frac{x}{1+e^x}$

quotient

f est le produit de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = \frac{1 + e^x - e^x \times x}{(1+e^x)^3}$ ⟵ formule de dérivation d'un quotient

⚠ Si on voit f comme un produit, il faut utiliser la formule de dérivation du produit de 2 fonctions dérivables

* f est le quotient de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ⊗ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. ⊗ le dénominateur ne s'annulant pas

⚠ Possible aussi de justifier de la façon suivante :
" f est le quotient de 2 fonctions dérivables sur leur ensemble de définition donc f est dérivable sur son ensemble de définition, $\mathbb{R}$ "

g

* $g(x)$ est continue, strictement croissante sur $[0, \alpha]$

Attention à la notation des fonctions : "g", ou "$x \mapsto g(x)$"

* g est continue, strictement croissante sur $[0, \alpha]$
donc elle admet une bijection sur $[0, \alpha - 1]$

vocabulaire !

c'est ambigu : il faut donner l'ens. de départ et l'ens. d'arrivée

La bonne phrase est :
"g est continue, strictement croissante sur $[0, \alpha]$, donc elle réalise une bijection de $[0, \alpha]$ sur son image $g([0, \alpha]) = [0, \alpha - 1]$ (donnée par le tableau de variation)

* $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ 0 < u_n \leq 1 \\ (u_n) \text{ converge vers } l \end{cases}$
donc par passage à la limite dans l'inégalité
$0 < l \leq 1$ il faut une inégalité large

Quand on passe à la limite, les inégalités deviennent larges ! Par exemple : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{n} > 0 \\ \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$

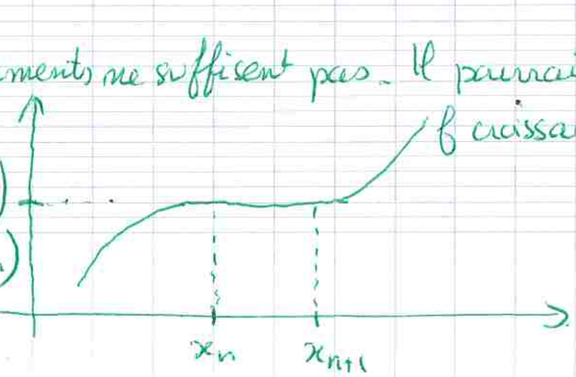
* Monotonie de (x_n) : $\forall n \in [\![4, +\infty[\![$, $\underbrace{f(x_{n+1})}_{\frac{1}{n+1}} \leq \underbrace{f(x_n)}_{\frac{1}{n}}$

On en déduit $x_{n+1} \leq x_n$ car f est croissante
Strictement

Ces arguments ne suffisent pas. Il pourrait arriver :

f croissante (non strictement ↗)

$f(x_n) = f(x_{n+1})$
donc $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$



ici on a $\begin{cases} f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \\ x_n < x_{n+1} \ !!! \end{cases}$