Faire en priorité l'exercice 2 Pour s'entraîner sur les VAR.

BCPST

1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°7

Jeudi 10 avril 2025

– Probabilités et Variables aléatoires –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions devront être soulignées ou encadrées.

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Questions de cours.

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[[1, n]]$.

1. Donner, sans justification, l'espérance de X.
2. Calculer, avec justifications, l'espérance de X^2. *On rappelle que* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. En déduire la variance de X.

Exercice 1.

Une professeure envoie n invitations à des anciens élèves pour un carrefour des métiers. Chaque ancien élève lui répond avec une probabilité $p \in]0,1[$. Elle fait un deuxième envoi à ceux qui n'ont pas répondu la première fois. De nouveau, chaque élève sollicité lui répond avec probabilité p.

1. Soit Y le nombre de réponses au premier envoi.
   (a) Reconnaître la loi de Y.
   (b) Donner l'espérance et la variance de Y.
2. Soit Z le nombre de réponses au deuxième envoi.
   (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
   (b) Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, sue représente l'événement $(Y = i)$?
   (c) En déduire, pour tous $(i, k) \in [\![0, n]\!]^2$, $P(Z = k | Y = i)$.
3. Soit $X = Y + Z$ le nombre total de réponses.
   (a) *Question préliminaire :* Montrer que, pour tout $(i, k, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leq i \leq k \leq n$, $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$.
   (b) Déterminer $X(\Omega)$.
   (c) Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
   (d) Déterminer la loi de X.
   Indication : On reconnaîtra (après calculs) une loi usuelle .

Exercice 2.

On considère une urne contenant 1 boule blanche et 1 boule noire.
On répète l'expérience suivante

- on tire au hasard une boule dans l'urne
- avant le tirage suivant, la boule tirée est remise dans l'urne ainsi qu'une autre boule de la même couleur.

Par exemple, à l'issue de la première expérience, l'urne contient donc 3 boules : 1 blanche et 2 noires ou 2 blanches et 1 noire.

1. Pour n un entier non nul, on note B_n l'événement "la boule piochée au n−ième tirage est blanche".
   (a) Déterminer $P(B_1)$ et $P(B_2 | B_1)$.
   (b) Déterminer $P(B_2)$.
2. Pour n un entier non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la n−ième expérience.

(a) Déterminer la loi de X_1. *(on fera apparaître les événements* B_i*).*

(b) Déterminer la loi de X_2.*(on fera apparaître les événements* B_i*).*

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [[1, n+2]]$.

(a) Sachant $X_n = k$, quelle est la composition de l'urne à l'issue de la n−ième expérience?

(b) Montrer que

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{n+2-k}{2+n} P(X_n = k) + \frac{k-1}{2+n} P(X_n = k-1).$$

(c) Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $[[1, n+1]]$.
On pourra faire une récurrence.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_{n+1}.
On pourra utiliser la formule des probabilités totales.