

CONTINUITÉ.

**Exercice 1.** Pour chacune des fonctions suivantes :

- indiquer son ensemble de définition
- indiquer si elle est prolongeable par continuité au point précisé.

Indication : dans certains cas, il pourra être judicieux de faire un développement limité du numérateur.

$$f : x \mapsto x \ln(2x) \text{ en } 0. \quad g : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)} \text{ en } 0. \quad h : x \mapsto \frac{\ln x}{x} \text{ en } 0.$$

$$i : x \mapsto \frac{e^x + \cos(x) - 2 - x}{x^2} \text{ en } 0 \quad j : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \ln(1 + \frac{x}{2})}{x^2} \text{ en } 0 \quad k : x \mapsto \frac{\sin(x) - x}{x^3} \text{ en } 0.$$

**Exercice 2.** Les fonctions suivantes sont-elles continues ? Déterminer les points où elles sont discontinues. Indiquer, en ces points, s'il y a continuité à droite ou continuité à gauche.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{xe^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad x \mapsto \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1, \\ 1 & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad x \mapsto \lfloor \frac{3}{2} + \frac{\cos x}{4} \rfloor$$

**Exercice 3.**

1. Rappeler l'ensemble de définition et le tableau de variations de la fonction arctangente et tracer l'allure de son graphe.
2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $h(x) = \text{Arctan} \frac{1}{x}$ . Déterminer l'ensemble de définition de  $h$  et calculer ses limites en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
3.  $h$  est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

**Exercice 4. (Théorème des valeurs intermédiaires)** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose que  $f(I) \subset \{0, 1\}$ . Montrer que  $f$  est constante.

Indication : on pourra essayer de représenter  $f$  par un dessin.

**Exercice 5.** On pose  $I = ]0, 1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction :

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x - \ln x - n$$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. Établir le tableau de variation de  $f_n$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique réel  $x_n$  appartenant à  $I$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .  
Indication : il faut être très rigoureux sur cette question : dans un premier temps, appliquer le théorème de la bijection. Dans un second temps, utiliser la définition d'une bijection : tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent.
3. Étudier la monotonie de la suite  $(x_n)$ . Indication : exprimer  $f_n(x_{n+1})$  et trouver son signe.

4. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.
5. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n = e^{x_n} e^{-n}$  et en déduire un équivalent de  $x_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 6.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = -x^2 + x \ln x + 2$ .

1. Justifier que  $f$  est continue.
2. Dresser le tableau de variation de  $f$  (on pourra calculer les dérivées  $f'$  et  $f''$ ). Préciser les limites en 0 et  $+\infty$ .
3. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle que l'on précisera.
4. Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque  $f^{-1}$ . Indiquer les limites.
5. Justifier que pour tout entier naturel  $k$ , il existe un unique réel strictement positif  $x_k$  tel que  $f(x_k) = -k$ . Déterminer, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k$  avec  $f^{-1}$ .
6. Montrer que la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante et déterminer sa limite quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .
7. Déterminer un équivalent de  $x_k$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 7.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en 0, telle que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(2x) = f(x)$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé quelconque. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $x_n = \frac{x}{2^n}$ . Exprimer de deux façons la limite de la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . En déduire que  $f(x) = f(0)$ .
3. Conclure.

**Exercice 8. Une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et continue nulle-part**

Soit  $\chi_{\mathbb{Q}}$  la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

( $\chi_{\mathbb{Q}}$  est la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$ ).

1. Donner l'allure du graphe de  $\chi_{\mathbb{Q}}$ .
2. Pour tout entier naturel non-nul  $n$ , on définit  $u_n = \frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ . Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\chi_{\mathbb{Q}}(u_n)$  et  $\chi_{\mathbb{Q}}(v_n)$ .
3. Les suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(\chi_{\mathbb{Q}}(u_n))$  et  $(\chi_{\mathbb{Q}}(v_n))$  ont-elles une limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ? Si oui, la déterminer.
4. En déduire que la fonction  $\chi_{\mathbb{Q}}$  n'est pas continue en 0.
5. Montrer que  $\chi_{\mathbb{Q}}$  n'est continue en aucun point de  $\mathbb{R}$ .

## CORRIGÉ (CONTINUITÉ).

**Exercice 5.** On pose  $I = ]0, 1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction :

$$\begin{aligned} f_n : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \ln x - n \end{aligned}$$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. Établir le tableau de variation de  $f_n$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique réel  $x_n$  appartenant à  $I$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .  
**Indication : il faut être très rigoureux sur cette question : dans un premier temps, appliquer le théorème de la bijection. Dans un second temps, utiliser la définition d'une bijection : tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent.**
3. Étudier la monotonie de la suite  $(x_n)$ . Indication : exprimer  $f_n(x_{n+1})$  et trouver son signe.
4. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.
5. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n = e^{x_n} e^{-n}$  et en déduire un équivalent de  $x_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Corrigé**

**Exercice 6.**

- 1.
- 2.
- 3.
4.
  - La suite  $(x_n)$  est décroissante, minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone,  $(x_n)$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.
  - $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < x_n \leq 1$  et  $(x_n)$  converge vers  $\ell$ . Donc par passage à la limite dans l'inégalité,  $0 \leq \ell \leq 1$ . **Attention, au passage à la limite, les inégalités deviennent larges.**
  - Montrons par l'absurde que  $\ell = 0$ .  
on suppose que  $\ell \neq 0$ . Donc  $\ell > 0$  (puisque  $\ell \in [0, 1]$ ).  
Par définition de la suite  $(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n - \ln(x_n) = n$ .  
Nous allons exprimer de deux façons la limite de  $(x_n - \ln(x_n))$ .  
D'une part, puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}_+$ ,  
par composition des limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - \ln(x_n) = \ell - \ln(\ell)$  limite finie.  
D'autre part, puisque  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n - \ln(x_n) = n$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - \ln(x_n) = +\infty$ .  
On obtient une contradiction car la première limite obtenue était une limite finie.  
On en déduit que  $\ell = 0$ .
5. Reprenons la définition de  $(x_n)$ .  
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n - \ln(x_n) = n$ . Donc  $\ln(x_n) = x_n - n$ . On applique la fonction exp, d'où :  
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n = e^{x_n} e^{-n}$ .  
Or nous avons montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$  donc par composition des limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x_n} = 1$ . On en déduit (par définition de suite équivalente) que  $x_n \sim e^{-n}$ .