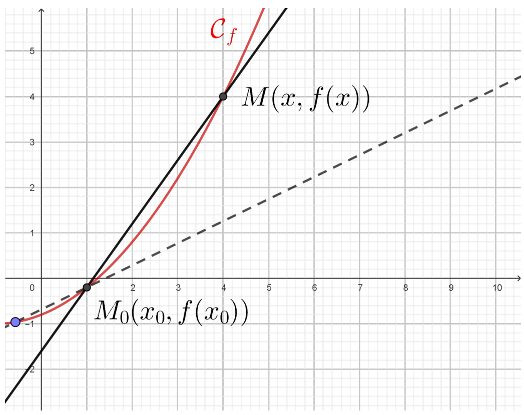
3.4 Application 2 : variations d'une fonction

Proposition 7 *Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.*
1. f est croissante sur $[a,b]$ si, et seulement si, $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0$.
2. f est décroissante sur $[a,b]$ si, et seulement si, $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leqslant 0$.
3. f est constante sur $[a,b]$ si, et seulement si, $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$.

Démonstration
1. $\Longrightarrow$ On suppose que f est croissante sur $[a,b]$.
Montrons que $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0$. *nous allons utiliser la lettre x_0 plutôt que x*
Soit $x_0 \in]a,b[$ fixé quelconque. Puisque f est croissante, pour tout $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$.
En effet :
- si $x_0 < x$, alors $f(x_0) \leqslant f(x)$ donc $x - x_0 < 0$ et $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$, donc le quotient est $\geqslant 0$.
- si $x < x_0$, alors $f(x) \leqslant f(x_0)$ donc $x - x_0 > 0$ et $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$, donc le quotient est $\geqslant 0$.
Dans tous les cas, on a $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ (*).
Or f est dérivable en x_0 donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et vaut $f'(x_0)$. Par passage à la limite dans l'inégalité (*), on en déduit $f'(x_0) \geqslant 0$.
Ceci est vrai pour $x_0 \in]a,b[$ quelconque, donc c'est vrai pour tout $x_0 \in]a,b[$.
Ainsi, $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0$.



$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est le coefficient directeur de la droite (M_0M).
Si la fonction est croissante, quelle que soit la place de x par rapport à x_0, ce coefficient directeur est positif.

$\Longleftarrow$ On suppose que $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0$.
Montrons que f est croissante sur $[a,b]$. Nous allons montrer que $\forall (x,y) \in [a,b]^2, x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$
Soient $(x,y) \in [a,b]^2$ fixés quelconques tels que $x < y$.
f est continue sur $[x,y]$, dérivable sur $]x,y[$, donc d'après la formule des accroissements finis, il existe $t \in]x,y[$ tel que $f'(t) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Or f' est positive sur $]a,b[$, donc $f'(t) \geqslant 0$. Donc $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$.
Puisque $y - x > 0$, on en déduit $f(y) - f(x) \geqslant 0$, d'où $f(x) \leqslant f(y)$.
Ainsi, f est croissante sur $[a,b]$.

2. On applique le résultat précédent à $-f$ qui est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, de dérivée $(-f)' = -f'$:

$$\begin{array}{lcl} f \text{ est décroissante} & \Longleftrightarrow & -f \text{ est croissante} \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in]a,b[,\ -f'(x) \geqslant 0 \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leqslant 0 \end{array}$$

3. On applique 1 et 2 :

$$\begin{array}{lcl} f \text{ est constante sur } [a,b] & \Longleftrightarrow & f \text{ est croissante et décroissante sur } [a,b] \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0 \text{ et } f'(x) \leqslant 0 \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0 \end{array}$$