

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice - On considère la fonction :

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Définir le prolongement par continuité, noté g .
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer g' .

$$\textcircled{1} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 e^{-x} = 0 \text{ par CC} \end{cases}$$

donc par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

Cette limite existe et elle est finie, donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ Sur $\mathbb{R}_+^*$, g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur ne s'annulant pas.

donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{2x^2 \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - 2x \cdot 2x e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{2e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} (1 - 2x)$$

$$\text{au 0 : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 e^{-x} = 0 \text{ par CC} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{donc par composition des limites, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ \text{Cette limite existe et est finie, donc } g \text{ est dérivable en 0 et } g'(0) = 0 \end{array}$$

Conclusion : g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$g': \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{2e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} (1 - 2x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice - On considère la fonction :

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{3}{t^2} \exp\left(-\frac{1}{t}\right).$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Définir le prolongement par continuité, noté g .
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer g' .

① $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 e^{-x} = 0$ par CC } donc par composition des limites, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} = 0$

Cette limite existe et elle est finie, donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{3}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

② Sur $\mathbb{R}_+^*$, g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur ne s'annulant pas.

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(t) = \frac{3e^{-\frac{1}{t}}}{t^4} (1 - 2t)$

en 0 : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{3}{t^3} e^{-\frac{1}{t}}$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 e^{-x} = 0$ par CC } donc par composition des limites, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} = 0$
 Cette limite existe et elle est finie, donc g est dérivable en 0, et $g'(0) = 0$

Conclusion : g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$g': \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{3e^{-\frac{1}{t}}}{t^4} (1 - 2t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$