

QCM - SYSTÈMES LINÉAIRES - CORRIGÉ.

1. **Un système échelonné a toujours des solutions :**

FAUX

Il peut y avoir des équations de compatibilité non-satisfaites.

2. **Un système de Cramer a une unique solution :**

VRAI

Un système de Cramer n'a pas d'équation de compatibilité car son rang est égal au nombre d'équations (donc toujours au-moins une solution)

et pas de paramètre pour décrire l'ensemble des solutions car son rang est égal au nombre d'inconnues (donc au-plus une solution).

3. **Si un système est échelonné et qu'il n'a pas d'équation de compatibilité, alors il admet au-moins une solution :**

VRAI

Seules des équations de compatibilité non-satisfaites empêchent l'existence de solution.

4. **Un système de 3 équations à 3 inconnues de rang 2 a toujours au-moins une solution :**

FAUX

Un système de 3 équations de rang 2 possède une équation de compatibilité qui peut ne pas être satisfaite.

5. **Un système homogène (= le second membre est constitué de zéros) a toujours au-moins une solution :**

VRAI

Un tel système a pour solution $(0, 0, \dots, 0)$ (ce n'est peut-être pas la seule...)

6. **Un système de 4 équations et 4 inconnues est un système de Cramer :**

FAUX

Cela dépend de son rang. Pour être de Cramer, son rang doit valoir 4.

Par exemple :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

est de rang 1, il n'est pas de Cramer alors qu'il a 4 équations et 4 inconnues.

7. **Un système échelonné admet au-moins une solution si et seulement si toutes ses équations de compatibilité sont satisfaites :**

VRAI

La seule condition pour qu'il existe au-moins une solution est que les équations de compatibilités soient satisfaites.

8. **Un système de 3 équations et 4 inconnues a toujours des solutions :**

FAUX

Un tel système peut avoir une équation de compatibilité non-satisfaite. Par exemple :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + z + t = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

9. **Un système de 3 équations, 4 inconnues, de rang 3, a toujours des solutions :**

VRAI

Car un tel système n'a pas d'équation de compatibilité (3 équations, rang 3). On peut même affirmer qu'il a une infinité de solutions qui s'expriment en fonction d'un paramètre.

10. **Un système de 3 équations, 4 inconnues, de rang 2, a toujours des solutions. L'ensemble des solutions s'exprime en fonction de 2 paramètres :**

FAUX

Car il admet une équation de compatibilité (3 équations, rang 2) donc un tel système n'a pas toujours de solutions.

Remarque : En revanche il est vrai que, s'il admet des solutions, alors celles-ci s'expriment en fonction de 2 paramètres.

11. **Un système de 3 équations, 5 inconnues, de rang 3, a toujours des solutions. L'ensemble des solutions s'exprime en fonction de 2 paramètres :**

VRAI

Le rang est égal au nombre d'équations donc il n'y a pas d'équation de compatibilité.

Il y a 5 inconnues donc l'ensemble des solutions s'exprime en fonction de $5 - (\text{rang}) = 5 - 3 = 2$ paramètres.

12. **Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . L'équation $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^3}$ se traduit par un système de 3 équations à 3 inconnues :**

FAUX

Il n'y a que deux inconnues : x et y , comme on le voit sur l'équation vectorielle.

13. Soient u, v deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . L'équation $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^3}$ se traduit par un système de 2 équations à 3 inconnues :

FAUX

C'est un système de 3 équations à 2 inconnues.

14. Soient u, v deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . L'équation $xu + yv = 0$ se traduit par un système de 3 équations à 2 inconnues :

VRAI

15. Le système qui traduit l'équation $x(1, 2, 1) + y(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ est de rang 2 :

VRAI

Cette équation se traduit par le système :

$$(S) : \begin{cases} x & = & 0 \\ 2x + y & = & 0 \\ x & = & 0 \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$(S) : \begin{cases} y + 2x & = & 0 \\ x & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

Ce système est de rang 2.

16. Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Si le système $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^3}$ admet une infinité de solutions, alors la famille (u, v) est liée :

VRAI

Si le système $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^3}$ admet une infinité de solutions, alors il y a la solution $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et il y a d'autres solutions (puisque'il y a une infinité de solutions). Donc il existe une solution $(x, y) \neq (0, 0)$ pour cette solution, on a $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $(x, y) \neq (0, 0)$. Donc la famille (u, v) est liée.

17. u et v sont deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . Si u et v sont colinéaires, le système $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^2}$ est de rang 2 :

FAUX

En effet, si u et v sont colinéaires, alors la famille (u, v) est liée. Donc il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, y) \neq (0, 0)$ et $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^2}$. Donc le système $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^2}$ admet au-moins deux solutions ((x, y) et $(0, 0)$). Or c'est un système de 2 équations à 2 inconnues. S'il était de rang 2, ce serait un système de Cramer et il aurait une unique solution, ce qui n'est pas le cas.

18. **u et v sont deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . Si u et v sont colinéaires, le système $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^2}$ est de rang 1 :**

FAUX

D'après la question précédente, le système n'est pas de rang 2. Il est donc de rang 1 ou 0. On ne peut pas affirmer qu'il est de rang 1 car il peut être de rang 0. En effet, si $u = v = 0_{\mathbb{R}^2}$,

le système est :
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il est de rang 0.

19. **Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . Si le système $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^2}$ est de rang 1, alors u et v sont colinéaires :**

VRAI

Si le système $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^2}$ est de rang 1, alors il a une équation de compatibilité satisfaite (puisque le second membre est constitué de 0) et admet une infinité de solutions. Il y a donc une solution non-nulle ; il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, y) \neq (0, 0)$ et $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^2}$. La famille (u, v) est donc liée. Donc les vecteurs u et v sont colinéaires.

20. **u et v sont deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . Si u et v sont colinéaires, le système $xu + yv = 0_{\mathbb{R}^2}$ est de rang 0 ou 1 :**

VRAI, d'après les explications des questions 17 et 18