QCM - Espaces vectoriels 1 - Corrigé.

1. **$\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:**

   FAUX
   En effet, $\mathbb{R}^2$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}^3$ (puisque les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont de la forme (x, y). Ils n'appartiennent pas à $\mathbb{R}^3$). Par exemple, $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ mais $(1, 2) \notin \mathbb{R}^3$.

2. **Soit n un entier naturel non-nul. Un espace vectoriel de dimension n contient un nombre fini de vecteurs :**

   FAUX
   On note E cet espace vectoriel. $n \geqslant 1$ donc E admet une base de cardinal $n \geqslant 1$. Soit u un vecteur de cette base. $u \neq O_E$. L'ensemble $\{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un ensemble infini inclus dans E.

3. **Une famille de 3 vecteurs contenant deux vecteurs égaux est liée :**

   VRAI
   Quitte à réordonner l'ordre des vecteurs, on peut poser $\mathcal{F} = (u, u, v)$ cette famille.
   On a : $1.u + (-1).u + 0v = O_E$ avec $(1, -1, 0) \neq (0, 0, 0)$. Donc $\mathcal{F}$ est liée.

4. **Une famille de deux vecteurs non-colinéaires est libre** :

   VRAI
   Dans le cours, nous avons la proposition suivante :
   Soit une famille de deux vecteurs $\mathcal{F} = (u, v)$.
   $\mathcal{F}$ est liée si, et seulement si, u et v sont colinéaires.
   C'est une équivalence. En particulier, on a l'implication : $\mathcal{F}$ liée $\Longrightarrow$ u et v colinéaires.
   La contraposée est : u et v non-colinéaires $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ libre.

5. **La famille** $((1, 1, 0), (1, 2, 1))$ **est libre** :

   VRAI
   En effet, cette famille est composée de **deux** vecteurs non-colinéaires.
   D'après la question précédente, elle est libre.

6. **On pose** $u = (1, 1, 0)$ **et** $v = (0, 0, 1)$**. Le vecteur** $(1, 2, 3)$ **appartient à vect**(u, v) :

   FAUX
   On cherche deux réels x et y tels que $x(1, 1, 0) + y(0, 0, 1) = (1, 2, 3)$. Cette équation est équivalente au système :

$$(S) : \begin{cases} x & = 1 \quad L_1 \\ x & = 2 \quad L_2 \\ \quad y & = 3 \quad L_3 \end{cases}$$

Or ce système est équivalent au système suivant,
obtenu en effectuant l'opération $L_2 \leftarrow L2 - L1$:

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ 0 & = & 1 \\ y & = & 3 \end{array} \right.$$

Ce système admet une équation de compatibilité non-satisfaite donc il n'a pas de solution. Donc il n'existe aucun couple (x, y) tels que $xu + yv = (1, 2, 3)$. Donc $(1, 2, 3)$ n'appartient pas à $\text{vect}(u, v)$.

7. **La famille** $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 3))$ **est libre** :

   VRAI

   Soient x, y, $z \in \mathbb{R}$ fixés quelconques tels que $x(1, 1, 0) + y(0, 1, 1) + z(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$ (E).
   Or

$$\begin{array}{rl} (E) \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & & & + & z & = & 0 & \\ & & y & + & z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & y & + & 3z & = & 0 & \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & & & + & z & = & 0 & \\ & & y & + & z & = & 0 & \\ & & & & 2z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. \\ & \text{système échelonné, de Cramer} \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

   On en déduit que la famille $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 3))$ est libre.

8. **Si la famille** (u, v, w) **est liée, alors** w **est combinaison linéaire de** u **et** v :

   FAUX
   Par exemple, on pose $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 2, 2)$, $w = (1, 0, 0)$.
   La famille (u, v, w) est liée car $2u + v + 0w = (0, 0, 0)$.
   Mais w n'est pas combinaison linéaire de u et v (cela se vérifie facilement, soit en écrivant le système correspondant à la recherche de x et y tels que $xu + yv = w$, soit en remarquant que les combinaisons linéaires de u et v sont toutes de la forme (z, z, z)).

9. **Si** w **est combinaison linéaire de** u **et** v**, alors** w **appartient à vect**(u, v) :

   VRAI
   C'est la définition de $\text{vect}(u, v)$.

10. **Si w appartient à vect(u,v), alors w est combinaison linéaire de u et v** :

    VRAI
    C'est la définition de vect(u,v).

11. $(0,0)$ **appartient à vect**$((1,1),(1,2))$:

    VRAI
    Car $(0,0)=0(1,1)+0(1,2)$.

12. $(1,1)$ **appartient à vect**$((1,1),(1,2))$:

    VRAI
    Car $(1,1)=1(1,1)+0(1,2)$.

13. $((1,1),(1,2))$ **est une famille génératrice de** $\mathbb{R}^2$:

    VRAI
    En effet, nous allons montrer que vect$((1,1),(1,2))=\mathbb{R}^2$.
    • $(1,1)$ et $(1,2)$ appartiennent à $\mathbb{R}^2$, donc vect$((1,1),(1,2))\subset\mathbb{R}^2$.
    • Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ fixé quelconque.
    On cherche x et $y\in\mathbb{R}$ tels que $x(1,1)+y(1,2)=(a,b)$ (E).

$$\begin{aligned}(E) &\iff \left\{\begin{array}{l} x+y=a \\ x+2y=b \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& a \\ y &=& b-a \;\; L_2\leftarrow L_2-L_1 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2a-b \\ y &=& b-a \end{array}\right.\end{aligned}$$

    Ainsi, $(a,b)=\underbrace{(2a-b)}_{\in\mathbb{R}}(1,1)+\underbrace{(b-a)}_{\in\mathbb{R}}(1,2)$. Donc $(a,b)\in$ vect$((1,1),(1,2))$.
    Donc $\mathbb{R}^2\subset$ vect$((1,1),(1,2))$.
    • Conclusion : On déduit des deux inclusions obtenues que $\mathbb{R}^2=$ vect$((1,1),(1,2))$. Cela signifie que la famille $((1,1),(1,2))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

14. $((1,0),(0,1),(1,4),(-2,3))$ **est une famille génératrice de** $\mathbb{R}^2$:

    VRAI
    En effet, c'est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et elle contient une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ (la famille $((1,0),(0,1))$)

15. $((1,2),(-1,-2),(2,4),(5,10))$ **est une famille génératrice de** $\mathbb{R}^2$:

    FAUX
    Remarque : Cette famille est constituée de vecteurs tous colinéaires. Quand on fait des combinaisons linéaires de vecteurs de cette famille, les vecteurs obtenus sont tous de la forme

$x(1,2)$, *avec* $x \in \mathbb{R}$.
On peut montrer (le faire, on obtient un système avec une équation de compatibilité non-satisfaite) que le vecteur $(1,0)$, qui appartient à $\mathbb{R}^2$, n'appartient pas à $\text{vect}((1,2),(-1,-2),(2,4),(5,10))$. Donc $\mathbb{R}^2 \not\subset \text{vect}((1,2),(-1,-2),(2,4),(5,10))$. Donc la famille $((1,2),(-1,-2),(2,4),(5,10))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$.

16. $0(1,2)+0(1,0)=(0,0)$ **donc la famille** $((1,2),(1,0))$ **est libre** :

    FAUX
    Il est vrai que cette famille est libre mais l'argument est faux. Pour prouver que cette famille est libre, il faut **résoudre** $x(1,2)+y(1,0)=(0,0)$ (d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$) et trouver comme unique solution $(x,y)=(0,0)$.

17. **vect**$((1,2,1),(0,1,2))$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^2$:

    FAUX
    Cet ensemble n'est pas inclus dans $\mathbb{R}^2$ car il est composé de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. D'après le cours, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

18. **Si une famille** (u,v) **vérifie** $0.u+0.v=O_E$**, alors cette famille est libre** :

    FAUX
    Remarque : Toute famille (u,v) *vérifie* $0.u+0.v=O_E$.
    Pour montrer qu'une famille (u,v) *est libre, il faut résoudre* $xu+yv=O_E$ *(d'inconnues* $x,y \in \mathbb{K}$*) et trouver comme unique solution* $x,y)=(0,0)$.
    Donnons un contre-exemple : par exemple, la famille $((1,0),(2,0))$ est liée (car $2(1,0)+(-1)(2,0)=(0,0)$) et pourtant $0(1,0)+0(2,0)=(0,0)$.

19. **Si une famille** (u,v,w) **est telle qu'aucun vecteur n'est colinéaire à un autre, alors cette famille est libre** :

    FAUX
    Par exemple, on pose $u=(1,0)$, $v=(0,1)$, $w=(1,1)$.
    Aucun des vecteur n'est colinéaire à un autre. Cette famille est liée car $u+v-w=(0,0)$.

20. **La famille** $((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1))$ **est génératrice de** $\mathbb{R}^3$ **et libre** :

    VRAI
    Montrons que cette famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$:
    • $(1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,1,1)\ \in \mathbb{R}^3$ donc $\text{vect}((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)) \subset \mathbb{R}^3$
    • Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ fixé quelconque. On cherche x, y, z appartenant à $\mathbb{R}$ tels que

    $$x(1,1,0)+y(0,1,1)+z(1,1,1)=(a,b,c)\ (E)$$

$$(E) \iff \begin{cases} x+z=a \\ x+y+z=b \\ y+z=c \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x \;+\; z \qquad = a \\ \qquad\qquad y = b-a \quad L2 \leftarrow L2-L1 \quad \text{système échelonné} \\ \qquad z \;+\; y = c \end{cases}$$

Ce système est échelonné, de rang 3 : il est de Cramer. Il admet une unique solution.
Donc il existe un (unique) triplet (x,y,z) de réels tels que $x(1,1,0)+y(0,1,1)+z(1,1,1) = (a,b,c)$.
Donc $(a,b,c) \in \text{vect}((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1))$.
Ainsi, $\mathbb{R}^3 \subset \text{vect}((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1))$.
• On déduit des deux inclusions que $\mathbb{R}^3 = \text{vect}((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1))$.
Donc la famille $((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que cette famille est libre.
Soient $x,y,z \in \mathbb{R}$ tels que $x(1,1,0)+y(0,1,1)+z(1,1,1) = (0,0,0)$ (E).

$$(E) \iff \begin{cases} x+z=0 \\ x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

On constate qu'on est ramené à la résolution du même système que précédemment, dans le cas particulier où $(a,b,c) = (0,0,0)$. Or nous avons vu que ce système avait une unique solution, et $(x,y,z) = (0,0,0)$ est solution. Donc c'est l'unique solution.
Ainsi, on a nécessairement $(x,y,z) = (0,0,0)$.
Donc la famille $((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1))$ est libre.
Remarque : nous verrons bientôt une autre manière (plus rapide) de traiter cette question.