NOM : CORRECTION

BCPST 12

Interrogation écrite numéro 22.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 22 - SUJET A - JEUDI 7 MAI 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1. On pose :

$$F = \left\{(2x+y, x-2y, y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Montrer par la méthode de votre choix que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel (du type $\mathbb{R}^n$) à préciser.

$$F = \left\{ x(2,1,0) + y(1,-2,1) \ , (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \text{Vect}\,(\underbrace{(2,1,0), (1,-2,1)}_{\text{vecteurs de } \mathbb{R}^3})$$

donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2e méthode : voir sujet B

Exercice 2. On pose :

$$\mathcal{F} = ((1,2,0),(0,1,1)) \quad \text{et} \quad G = \text{vect}(\mathcal{F})$$

1. Le vecteur $(3,2,-4)$ appartient-il à G ?
2. Le vecteur $(2,1,1)$ appartient-il à G ?
3. La famille $\mathcal{F}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
4. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de G.

① On remarque que $(3,2,-4) = 3(1,2,0) - 4(0,1,1)$
donc $(3,2,-4) \in \text{vect}(\mathcal{F})$
donc $(3,2,-4) \in G$

② On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x(1,2,0) + y(0,1,1) = (2,1,1)$ (E)

$$(E) \iff \begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 & L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ 0 = 4 & L3 \leftarrow L3 - L2 \end{cases}$$

système incompatible donc l'éq° (E) n'a pas de solution.

Donc $(2,1,1) \notin \text{vect}(\mathcal{F})$
Donc $(2,1,1) \notin G$

③ D'après la question ②, $\begin{cases} (2,1,1) \in \mathbb{R}^3 \\ (2,1,1) \notin \text{vect}(\mathcal{F}) \end{cases}$

donc $\mathbb{R}^3 \not\subset \text{vect}(\mathcal{F})$
donc $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$

④ $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de G par définition (car $G = \text{vect}\,\mathcal{F}$)
$\mathcal{F}$ est libre car elle est constituée de $\underline{\underline{2}}$ vecteurs non-colinéaires.
Donc $\mathcal{F}$ est une base de G.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 22 - SUJET B - JEUDI 7 MAI 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Exercice 1. On pose :

$$F = \{(2x + y + z, x - 2y), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

Montrer par la méthode de votre choix que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel (du type $\mathbb{R}^n$) à préciser.

$$F = \{x(2,1) + y(1,-2) + z(1,0),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$
$$= \text{vect}\,(\underbrace{(2,1), (1,-2), (1,0)}_{\text{vecteurs de } \mathbb{R}^2})$$

donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Autre méthode : montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- $F \subset \mathbb{R}^2$ par définition
- $(0,0) \in F$ (pour $x=0$, $y=0$, $z=0$)
  $\hookrightarrow (2\times 0+0+0, 0-2\times 0) = (0,0)$
- Soient $u, v \in F$ fixés quelconques et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ fixés quelconques

$u \in F$ donc il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $u = (2x+y+z, x-2y)$
$v \in F$ donc il existe $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ tels que $v = (2x'+y'+z', x'-2y')$

$$\lambda u + \mu v = \lambda(2x+y+z, x-2y) + \mu(2x'+y'+z', x'-2y')$$
$$= (2\lambda x + \lambda y + \lambda z + 2\mu x' + \mu y' + \mu z', \lambda x - 2\lambda y + \mu x' - 2\mu y')$$
$$= (2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y'))$$

On pose $X = \lambda x + \mu x'$, $Y = \lambda y + \mu y'$, $Z = \lambda z + \mu z'$
On a $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda u + \mu v = (2X + Y + Z, X - 2Y)$
donc $\lambda u + \mu v \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

<u>Remarque :</u> la première méthode est beaucoup plus simple !

Exercice 2. On pose :

$$\mathcal{F} = ((2,1,0),(1,0,1)) \quad \text{et} \quad G = \text{vect}(\mathcal{F})$$

1. Le vecteur $(2,3,-4)$ appartient-il à G ?
2. Le vecteur $(1,2,1)$ appartient-il à G ?
3. La famille $\mathcal{F}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
4. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de G.

① On remarque que $3(2,1,0) - 4(1,0,1) = (2,3,-4)$
donc $(2,3,-4) \in \text{vect}(\mathcal{F})$
donc $(2,3,-4) \in G$.

② On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x(2,1,0) + y(1,0,1) = (1,2,1)$ (E)

$$(E) \iff \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \quad L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ 0 = 4 \quad L3 \leftarrow L3 - L2 \end{cases}$$

système incompatible
l'équation (E) n'a donc pas de solution

Donc $(1,2,1) \notin \text{vect}(\mathcal{F})$. Donc $(1,2,1) \notin G$.

③ D'après la question ②, $\begin{cases} (1,2,1) \in \mathbb{R}^3 \\ (1,2,1) \notin \text{vect}(\mathcal{F}) \end{cases}$

donc $\mathbb{R}^3 \not\subset \text{vect}(\mathcal{F})$
donc $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

④ $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de G par définition (puisque $G = \text{vect}\,\mathcal{F}$)
$\mathcal{F}$ est libre car elle est constituée de $\underline{\underline{2}}$ vecteurs non-colinéaires.
Donc $\mathcal{F}$ est une base de G.