

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 27.

Semaine du lundi 18 mai au vendredi 22 mai 2026.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de la semaine 26.
2. Famille génératrice et base, Famille libre et base : énoncés (sans démonstration) des deux théorèmes ("Base extraite", "base incomplète"). Exemples :
 - La famille $((1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1))$ est-elle une famille génératrice de \mathbb{C}^4 ?
 - La famille $((1, 4, 0), (-\sqrt{5}, 1, 1), (0, -2, 1), (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}))$ est-elle libre ?
 - Donner deux méthodes pour montrer qu'une famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .
3. Expliquer comment on extrait une base à partir d'une famille génératrice d'un espace vectoriel. On montrera que si v est combinaison linéaire de u_1, \dots, u_p , alors $\text{vect}(v, u_1, \dots, u_p) = \text{vect}(u_1, \dots, u_p)$.
4. Soit $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1))$. Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer les coordonnées d'un vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ dans cette base.
5. Définition du rang d'une famille de vecteurs.
Exemples : rang de $\mathcal{F} = ((1, 0), (0, 1))$ et de $\mathcal{G} = ((1, 0, -1), (2, 1, 0), (1, 1, 1))$.
6. Définition d'application linéaire. Remarques. Exemples : montrer que $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y, y)$ est linéaire, et que $g : (x, y) \mapsto xy$ ne l'est pas (préciser les espaces de départ et d'arrivée).
7. Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire. Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels à préciser.
8. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective ssi... ? f est surjective ssi... ? (sans démonstration.)

Exemple : Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y + z, x - y + z, x + y - z) \end{aligned}$$

Montrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 (déterminer $\ker f$ et $\text{Im} f$).

Thème de la colle :

EXOS-CHRONOS - poser 5 questions des quatre "Course aux nombres" (voir programmes de colles précédents, à partir de la semaine 17). Ces questions doivent être traitées très rapidement. Les étudiants doivent savoir expliquer oralement leurs résultats.

ESPACES VECTORIELS

Définition générale d'espace vectoriel

Définition (hors programme). Exemples. Combinaisons linéaires.

Sous-espaces vectoriels

Définition. Exemples. Intersection, réunion de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

Famille génératrice. Famille libre.

Colinéarité de deux vecteurs. Cas particulier de deux vecteurs. Caractérisation des familles liées. Bases.

Dimension. Exemples.

Famille génératrice et base (théorème de la base extraite et conséquences). Famille libre et base (théorème de la base incomplète et conséquences). Le théorème de la base incomplète est hors programme. Ses conséquences sont au programme).

Inclusion de deux sous-espaces vectoriels. Coordonnées. Rang d'une famille de vecteurs. Proposition : critère sur le rang pour qu'une famille de vecteur soit libre, génératrice de l'espace vectoriel. Représentation matricielle d'un vecteur par la matrice colonne de ses coordonnées dans une base.

APPLICATIONS LINÉAIRES

Applications linéaires

Définition. Opérations sur les applications linéaires : CL, composition, bijection réciproque.

Noyau et image d'une application linéaire

Définitions. $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels de E et de F . CNS pour qu'une application linéaire soit injective. Traduction de la surjectivité d'une application linéaire f avec $\text{Im} f$.