QCM - Espaces vectoriels 2 - Corrigé.

1. La famille $((1,2,0),(5,-2,1/4),(-2,1/5,1),(3,4,-6))$ est libre :

   FAUX
   Il s'agit d'une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 donc une famille de 4 vecteurs est nécessairement liée.

2. La famille $((1,1,0),(1,2,1))$ est libre :

   VRAI
   Car il s'agit d'une famille de **deux** vecteurs non-colinéaires.

3. La famille $((1,0,1,1),(0,1,1,1),(1,2,2,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$:

   FAUX
   Car $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4 donc une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ doit comporter au-moins 4 vecteurs. Or cette famille est de cardinal 3.

4. La famille $((1,0,0),(0,1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$:

   FAUX
   Car cette famille est composée de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le sous-espace vectoriel qu'elle engendre, $\text{vect}((1,0,0),(0,1,0))$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (composé de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et non de $\mathbb{R}^2$). Ce n'est pas $\mathbb{R}^2$.

5. La famille $((1,1),(1,2))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$:

   VRAI
   La manière la plus rapide de le voir est de remarquer que c'est une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$, libre (car composée de 2 vecteurs non-colinéaires). Donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$. Elle est donc génératrice de $\mathbb{R}^2$.

6. $(2,2,1)$ appartient à $\text{vect}((1,1,1),(1,1,0))$:

   VRAI
   Car $(2,2,1) = (1,1,1) + (1,1,0)$

7. $\dim(\text{vect}((1,1),(-1,-1),(2,2),(3,3)) = 1$:

   VRAI
   Tous les vecteurs sont colinéaires au vecteur $(1,1)$.

Donc $\text{vect}((1,1),(-1,-1),(2,2),(3,3)) = \text{vect}((1,1))$. La famille $((1,1))$ est libre car constituée d'un unique vecteur non-nul. Elle est génératrice de $\text{vect}((1,1))$ par définition. C'est donc une base de $\text{vect}((1,1)$. Donc $\dim(\text{vect}((1,1)) = 1$.
Remarque : $\text{vect}((1,1))$ est donc une droite vectorielle.

8. $(0,0)$ appartient à $\text{vect}((1,2),(2,1))$:

   VRAI
   Car $(0,0) = 0(1,2) + 0(2,1)$.

9. $\text{vect}((1,2,0),(0,1,0))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:

   FAUX
   C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Cet ensemble est composé de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et non de $\mathbb{R}^2$, donc $\text{vect}((1,2,0),(0,1,0)) \not\subset \mathbb{R}^2$.

10. Soit une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Vrai ou faux :

    (a) On peut en extraire une base de $\mathbb{R}^3$:

    FAUX
    Par exemple, on ne peut extraire aucune base de $\mathbb{R}^3$ de la famille :
    $((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4))$.

    (b) On peut affirmer qu'elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$:

    FAUX
    Par exemple la famille $((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ (tout exemple qui convient pour justifier la réponse de la question précédente convient pour cette question).

    (c) On peut affirmer qu'elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$:

    FAUX
    Par exemple la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle contient 3 vecteurs qui forment clairement une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ (vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$)

    (d) On peut affirmer qu'elle est libre :

    FAUX
    En fait on peut affirmer le contraire (voir question suivante)

    (e) On peut affirmer qu'elle est liée :

VRAI
Car il s'agit d'une famille de 4 vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 3.

(f) Si elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$, alors on peut en extraire une base :

VRAI
Car de toute famille génératrice d'un espace vectoriel E, on peut extraire une base de E (théorème de la base extraite).

11. Soit une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$
(a) On peut affirmer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$:

FAUX
Par exemple la famille $((1,0,0),(2,0,0),(3,0,0))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle est liée.

(b) On peut affirmer qu'elle est libre :

FAUX
Par exemple la famille $((1,0,0),(2,0,0),(3,0,0))$ n'est pas libre.

(c) Si elle est libre, alors c'est une base de $\mathbb{R}^3$:

VRAI
Si cette famille est libre, puisque c'est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, on peut affirmer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(d) Si elle est liée, alors elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$:

VRAI
démonstration : On suppose que cette famille est liée.
Si elle était génératrice de $\mathbb{R}^3$, alors comme elle est de cardinal 3 et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, alors elle serait une base de $\mathbb{R}^3$ donc serait libre, et ce n'est pas le cas.
On en déduit que cette famille n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : Pour justifier cette réponse, on peut aussi montrer facilement la contraposée :
"Si elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$, alors elle est libre".

(e) Si elle est liée, alors elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$:

FAUX
Nous venons de montrer que l'assertion précédente est vraie. Donc celle-ci est fausse.

(f) Si elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$, alors elle est libre :

VRAI
C'est la contraposée de l'assertion 11d (cette justification suffit mais nous allons en profiter pour donner une autre démonstration)
Démonstration : On suppose que cette famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Puisqu'elle est composée de 3 vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, on en déduit que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc elle est libre.

(g) Si elle n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, alors elle n'est pas libre :

VRAI

La contraposée est :
"Si cette famille est libre, alors c'est une base de $\mathbb{R}^3$"
Elle est vraie car cette famille est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

(h) Si elle est libre, alors elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$:

VRAI
Nous avons vu précédemment que su cette famille est libre, alors c'est une base de $\mathbb{R}^3$: elle est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(i) L'espace vectoriel engendré par cette famille est de dimension au-moins 2 :

FAUX
Le sous espace vectoriel engendré par cette famille peut être de dimension 0, 1, 2 ou 3.
Par exemple, si $\mathcal{F} = ((1,1,1),(2,2,2),(3,3,3))$, vect$\mathcal{F}$ est de dimension 1.
Si $\mathcal{F} = ((0,0,0),(0,0,0),(0,0,0))$, alors vect$\mathcal{F}$ est de dimension 0.

12. Soit une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Vrai ou faux :

(a) On peut affirmer qu'elle est libre :

FAUX
Par exemple, la famille $((1,1,0,0),(2,2,0,0),(0,0,1,1))$ est liée.

(b) On peut affirmer qu'elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$:

VRAI
Puisque $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ doit comporter au-moins 4 vecteurs.

(c) On peut affirmer qu'elle contient une famille libre :

FAUX
La famille $((0,0,0,0),(0,0,0,0),(0,0,0,0))$ ne contient aucune famille libre.

(d) Si elle est liée, alors un vecteur est combinaison linéaire des autres :

VRAI
d'après une proposition du cours :
"Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathcal{F}$ est liée
(ii) il existe un vecteur de $\mathcal{F}$ qui est combinaison linéaire des autres vecteurs

(e) Si aucun des vecteurs n'est colinéaire aux autres, alors elle est libre :

FAUX
Par exemple, dans la famille $\mathcal{F} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,1,0,0))$, aucun vecteur n'est colinéaire aux autres, pourtant cette famille est liée.

(f) Si un vecteur est colinéaire à un autre, alors elle est liée :

VRAI
Car si un vecteur de $\mathcal{F}$ est colinéaire à un autre, alors ces deux vecteurs forment une famille liée. Donc $\mathcal{F}$ contient une famille liée, donc $\mathcal{F}$ est liée.