

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 28.

Semaine du mardi 26 mai au vendredi 29 mai 2026.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de la semaine 27.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective ssi... ? et démonstration.
3. Définition du rang d'une application linéaire. Énoncé de la proposition reliant l'injectivité, surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire et son rang. Énoncé et démonstration (simple, peut être faite à l'oral) des deux corollaires.
4. Exemple illustrant la question de cours précédente : montrer que $f(x, y, z) \mapsto (x+z, y+z, x+y+z)$ est un automorphisme de \mathbb{R}^3 . (on admettra la linéarité).
5. Énoncé du théorème du rang. Le vérifier sur l'exemple :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x+y, x+z) \end{aligned}$$

6. Définition de la matrice d'une application linéaire f par rapport à des bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Exemple : Soient \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{C} = ((1, 1), (1, -1))$. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x+2y, 2x+y) \end{aligned}$$

- Justifier (oralement) que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^2 . Déterminer $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$, $Mat_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$ et $Mat_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(f)$.
7. Rappeler les définitions de : rang d'une matrice, rang d'une application linéaire, rang d'une famille de vecteurs, rang d'un système. Expliquer le lien entre ces définitions. Exemples à traiter le plus simplement possible :

(a) Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x+2y, -y+z, x+y+z) \end{aligned}$$

Déterminer le rang de f .

(b) Soit $\mathcal{F} = ((0, 1, 2), (-1, -1, 1), (1, 0, 2), (0, -1, 3))$. Déterminer le rang de \mathcal{F} .

Thème de la colle :

CALCULS :

- L'examinateur donnera une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, et l'élève devra déterminer sa matrice par rapport aux bases canoniques de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^n .
- L'examinateur donnera une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, et l'élève déterminera l'application linéaire canoniquement associée.

ESPACES VECTORIELS

Tout le cours

APPLICATIONS LINÉAIRES

Applications linéaires

Définition. Opérations sur les applications linéaires : CL, composition, bijection réciproque.

Noyau et image d'une application linéaire

Définitions. $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont des sev de E et de F . CNS pour qu'une application linéaire soit injective (surjective).

Rang d'une application linéaire

Image d'une base par une application linéaire. Rang d'une application linéaire. Proposition : f est injective $\iff \text{rg} f = \dim E$, f surjective $\iff \text{rg} f = \dim F$, f est bijective $\iff \text{rg} f = \dim E = \dim F$. Corollaires :

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, f est injective $\iff f$ est injective $\iff f$ est bijective. Il n'existe pas d'isomorphisme entre deux espaces vectoriels de dimensions différentes.

Matrice d'une application linéaire

Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Application linéaire canoniquement associée à une matrice A . Expression matricielle de l'image d'un vecteur. Linéarité de la représentation. Matrice d'une composée. Matrice d'un isomorphisme.

Rangs Bilan sur les rangs : rang d'une matrice, rang d'un système, rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire. Rappel des définitions. Propositions : le rang d'une matrice A est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à A . Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes (ou lignes).