NOM : **BCPST 12**

Interrogation écrite numéro 24.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 24 - SUJET A - VENDREDI 22 MAI 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, -3x+5y) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (au départ et à l'arrivée).
2. On pose $\mathcal{C} = ((1,1),(1,3))$. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les coordonnées d'un vecteur (a,b) quelconque de $\mathbb{R}^2$ dans cette base.
3. Déterminer les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{CB}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(f)$, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{CC}}(f)$.

① $\boxed{\mathrm{Mat}_{can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}$

② • $(1,1)$ et $(1,3) \in \mathbb{R}^2$ donc $\mathrm{vect}(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^2$

• Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé quelconque.
On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x(1,1) + y(1,3) = (a,b)$ (E)

$(E) \iff \begin{cases} x + y = a \\ x + 3y = b \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + y = a \\ 2y = b - a \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$ système échelonné, de Cramer

$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(3a-b) \\ y = \frac{1}{2}(b-a) \end{cases}$ donc $(a,b) \in \mathrm{vect}(\mathcal{C})$

Donc $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{vect}(\mathcal{C})$

• On déduit des 2 inclusions que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{vect}(\mathcal{C})$

Donc $\mathcal{C}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$
De plus, $\mathrm{card}\,\mathcal{C} = \dim \mathbb{R}^2$ (dimension finie) } Donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$,

et les coordonnées d'un vecteur (a,b) quelconque dans la base $\mathcal{C}$ sont $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3a-b) \\ \frac{1}{2}(b-a) \end{pmatrix}}$

③ $$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{CB}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(1,1) & f(1,3) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (1,0) \\ (0,1) \end{array}}$$

car $f(1,1) = (2,2)$
$f(1,3) = (4,12)$ } il n'y a pas de travail pour trouver les coordonnées dans la base canonique

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(1,0) & f(0,1) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,3) \end{array}}$$

<u>détails</u> :

$f(1,0) = (1,-3) \leftarrow$ à décomposer dans la base $\mathcal{E}$; on a la décomposition grâce à la question 2

Or $(1,-3) = \frac{1}{2}(3+3)(1,1) + \frac{1}{2}(-3-1)(1,3)$

$= 3(1,1) - 2(1,3) \longrightarrow$ 1ère colonne : $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$f(0,1) = (1,5) \leftarrow$ idem : à décomposer dans la base $\mathcal{E}$

Or $(1,5) = \frac{1}{2}(3-5)(1,1) + \frac{1}{2}(5-1)(1,3)$

$= (-1)(1,1) + 2(1,3) \longrightarrow$ 2e colonne : $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(1,1) & f(1,3) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,3) \end{array}}$$

<u>détails</u> :

à décomposer dans la base $\mathcal{E}$

$f(1,1) = (2,2) = 2(1,1)$

donc $f(1,1) = 2(1,1) + 0(1,3) \longrightarrow$ 1ère colonne : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(1,3) = (4,12) \leftarrow$ idem

On remarque que $f(1,3) = 4(1,3)$

donc $f(1,3) = 0(1,1) + 4(1,3) \longrightarrow$ 2e colonne : $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

CORRIGÉ

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 24 - SUJET B - VENDREDI 22 MAI 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (5x-3y, x+y) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (au départ et à l'arrivée).
2. On pose $\mathcal{C} = ((1,1),(3,1)$. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les coordonnées d'un vecteur (a,b) quelconque de $\mathbb{R}^2$ dans cette base.
3. Déterminer les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{CB}}(f)$, $\text{Mat}_{\mathcal{BC}}(f)$, et $\text{Mat}_{\mathcal{CC}}(f)$.

① $\boxed{\text{Mat}_{can}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

② • $(1,1)$ et $(3,1) \in \mathbb{R}^2$ donc $\text{vect}((1,1),(3,1)) \subset \mathbb{R}^2$

• Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé quelconque.

On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x(1,1) + y(3,1) = (a,b)$ (E)

$$(E) \iff \begin{cases} x + 3y = a \\ x + y = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3y = a \\ -2y = b - a \quad L2 \leftarrow L2 - L1 \end{cases} \quad \text{système de Cramer}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-a+3b) \\ y = \frac{1}{2}(a-b) \end{cases} \qquad \text{Donc } (a,b) \in \text{vect}(\mathcal{C})$$

Donc $\mathbb{R}^2 \subset \text{vect}(\mathcal{C})$

• On déduit des deux inclusions que $\mathbb{R}^2 = \text{vect}(\mathcal{C})$

Donc $\mathcal{C}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$

De plus, $\text{card}\, \mathcal{C} = \dim \mathbb{R}^2$ (dimension finie)

donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

Les coordonnées d'un vecteur (a,b) de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{C}$ sont $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-a+3b) \\ \frac{1}{2}(a-b) \end{pmatrix}}$

③ $$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{CB}}(f) = \begin{array}{cc|c} f(1,1) & f(3,1) & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \left(\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 12 \\ 4 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} (1,0) \\ (0,1) \end{matrix} \end{array}}$$

car $f(1,1) = (2,2)$ et $f(3,1) = (12,4)$ — il n'y a pas de travail pour trouver les coordonnées dans la base canonique ! ☺

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(1,0) & f(0,1) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1,1) \\ (3,1) \end{array} \end{array}}$$

détails :

- $f(1,0) = (5,1)$ ← à décomposer dans la base $\mathcal{E}$
  ↳ on a la décomposition grâce à la question 2

  Or $(5,1) = \frac{1}{2}(-5+3)\,(1,1) + \frac{1}{2}(5-1)\,(3,1)$
  $= -1\,(1,1) + 2\,(3,1)$

  ↳ 1ère colonne : $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $f(0,1) = (-3,1)$ ← idem : à décomposer dans la base $\mathcal{E}$

  Or $(-3,1) = \frac{1}{2}(3+3)(1,1) + \frac{1}{2}(-3-1)(3,1)$
  $= 3(1,1) - 2(3,1)$

  ↳ 2e colonne : $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(1,1) & f(3,1) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1,1) \\ (3,1) \end{array} \end{array}}$$

détails : $f(1,1) = (2,2)$ ← à décomposer dans la base $\mathcal{E}$

On remarque que $f(1,1) = 2(1,1) + 0(3,1)$

↳ 1ère colonne : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(3,1) = (12,4)$ ← idem

On remarque que $f(3,1) = 4(3,1) = 0(1,1) + 4(3,1)$

↳ 2e colonne : $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$