Calculs de primitives.

1 Reconnaissance de primitives.

1.1 Principe

Méthode :
Soient I et J deux intervalles. Soit g une fonction définie sur I.
On suppose que la fonction g est du type $g : x \mapsto u'(x)f(u(x))$, avec :

$$\begin{cases} f \text{ une fonction continue sur } J, \\ u \text{ une fonction dérivable sur } I, \text{ à valeurs dans } J, \end{cases}$$

On suppose que l'on connaît une primitive $F : J \to \mathbb{R}$ de f sur J.
Alors la fonction :

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(u(x)) \end{array}$$

est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1 : Une telle primitive F de f sur J existe car

Remarque 2 : Pourquoi $x \mapsto F(u(x))$ est-elle une primitive de $x \mapsto u'(x)f(u(x))$ sur I ?

Exemples : Dans tous les exemples qui suivent, u est une fonction définie sur un intervalle I, dérivable sur I.

1. Si u ne s'annule pas sur I, déterminer une primitive sur I de $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

2. Déterminer une primitive de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I

3. Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Déterminer une primitive de $x \mapsto u'(x)u(x)^n$ sur I

4. Déterminer une primitive de $x \mapsto u'(x)[u(x)]^3$ sur I

5. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$ sur I

Exercice 1.

1. Quel est l'ensemble des primitives de $x \mapsto \cos x \sin x$?

2. Quel est l'ensemble des primitives de $x \mapsto \cos^3 x$?

3. Quel est l'ensemble des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$?

4. Quel est l'ensemble des primitives de $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$?

1.2 Résultat fondamental

Proposition

Soit I un intervalle et soit $x_0 \in I$. Soit f une fonction continue sur I. La fonction :

$$\begin{array}{rrcl} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt \end{array}$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

démonstration

• F est une primitive de f :
f est continue sur I donc elle y admet des primitives. On pose G l'une d'entre elles.
Donc pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt = [G(t)]_{x_0}^{x} = G(x) - G(x_0)$.
Ainsi, $\forall x \in I,\ F(x) = G(x) - \underbrace{G(x_0)}_{\text{constante}}$. Donc F est une primitive de f sur I (puisque G en est une).

• F s'annule en x_0 :
Par définition de F, $F(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0} f(t)\ dt = 0$.

• Unicité :
On sait déjà que F est une primitive de f sur I qui s'annule en x_0.
Montrons que toute primitive de f sur I qui s'annule en x_0 est F.
Soit H une primitive de f sur I qui s'annule en x_0.
H et F sont toutes les deux une primitive de f sur l'intervalle I donc elles diffèrent d'une constante.
Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ H(x) = F(x) + \lambda$.
En particulier, puisque $x_0 \in I$: $H(x_0) = F(x_0) + \lambda$. Or $H(x_0) = F(x_0) = 0$, donc $\lambda = 0$.
Ainsi, $\forall x \in I,\ H(x) = F(x)$.

• Conclusion : il existe une unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0. C'est la fonction :

$$\begin{array}{rccl} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt \end{array}$$

Exemple :

Corollaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur I. Il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0. C'est la fonction :

$$\begin{array}{rccl} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt. \end{array}$$

admis

2 Intégration par parties

Proposition :

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, alors pour tous $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{dt} = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{dt}.$$

Rappel : une fonction f, définie sur un intervalle I, est dite de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

Démonstration :

Soient $(a, b) \in I^2$ fixés quelconques. On suppose que u et v sont de classe C^1 sur I. Donc le produit uv aussi, et $(uv)' = u'v + uv'$.

Donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (uv)'(t)\ dt = \int_a^b u'(t)v(t)\ dt + \int_a^b u(t)v'(t)\ dt\ (*)$$

(*)**Remarque :** Puisque u et v sont de classe C^1 sur I, u' et v' sont continues sur I. Il en est de même pour u et v (puisqu'elles sont dérivables, elles sont continues). Donc par produit, sommes de fonctions continues, $u'v$, uv', $u'v+uv'$ sont continues sur I. Donc leur intégrale entre a et b existe.

On en déduit :

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\ dt + \int_a^b u(t)v'(t)\ dt$$

<u>Exemples</u> :

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 te^{2t}\ dt$

2. Déterminer une primitive de $x \mapsto xe^{2x}$ sur ...

3. Déterminer une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Déterminer une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ sur

5. Déterminer une primitive de arctan sur

3 Changement de variable

3.1 Formule du changement de variable

Proposition

Soient α et β deux réels. On pose $J = [\alpha, \beta]$ (si $\alpha \leqslant \beta$) ou $J = [\beta, \alpha]$ (si $\beta \leqslant \alpha$)).
Soit φ une fonction de classe C^1 sur le segment J,
et soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant $\varphi(J)$. Alors :
$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ \mathrm{d}t$.
On dit qu'on a effectué le changement de variable de classe C^1 : $t = \varphi(x)$.

Démonstration :
La fonction $t \mapsto f(t)$ est continue sur I, donc elle admet des primitives. On note F l'une d'entre elles.
Alors la fonction $x \mapsto f(\varphi(x))\varphi'(x)$ (continue sur J) est la dérivée de $x \mapsto F(\varphi(x))$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\ \mathrm{d}x$ est bien définie, et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\ \mathrm{d}x = [F(\varphi(x))]_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$.
Par ailleurs, puisque F est une primitive de f sur I, $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ \mathrm{d}t = [F(t)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$.
Ainsi, on constate que $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ \mathrm{d}t$.

En pratique :

1. On pose $t = \varphi(x)$ et on précise que φ est de classe C^1 sur un intervalle bien choisi.
   Éventuellement, si φ est bijective, on peut exprimer aussi x en fonction de t, ce qui peut parfois être utile.
2. On exprime dt en fonction de x et dx : $dt = \varphi'(x)dx$.
3. On écrit la correspondance entre les bornes à l'aide d'un tableau :

x	$t(= \varphi(x))$
α	
β	

4. On écrit la nouvelle intégrale avec les correspondances :
   1. $\varphi(x) \longleftrightarrow t$,
   2. $\varphi'(x)dx \longleftrightarrow dt$,
   3. les bornes trouvées précédemment.

Remarque : Cette formule peut s'utiliser de deux manières :

1er cas : en partant de l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. La nouvelle variable est $t = \varphi(x)$. Dans ce cas, il faut repérer que la fonction dans l'intégrale de départ se met sous la forme $f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

2ème cas : En partant d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ que l'on cherchera à écrire $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$. La nouvelle variable est x telle que $\varphi(x) = t$. Dans ce cas, il faut trouver une fonction φ, et α et β tels que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$. Il faut aussi vérifier que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$ (I ensemble de définition de f).
C'est dans ce second cas que le changement de variable a vraiment un intérêt.

Exemples :

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$.

2. déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ sur ...

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)\cos x \; dx$.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{1-t^2} \; dt$.

4 Cas particuliers à connaître.

4.1 Calcul de $\displaystyle\int_a^b \cos^n x \sin^p x dx$ $(n,\ p \in \mathbb{N})$.

Remarque : cette intégrale est bien définie car

1er cas : l'une au moins des puissance (n ou p) est impaire :
Par exemple, si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
$\displaystyle\int_a^b \cos^n x \sin^p x dx = \int_a^b \cos^{2k+1} x \sin^p x dx = \int_a^b (\cos^2 x)^k \cos x \sin^p x dx.$
On se rappelle que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, d'où :
$\displaystyle\int_a^b \cos^n x \sin^p x dx = \int_a^b (1-\sin^2 x)^k \sin^p x \cos x\ dx.$
On effectue le changement de variable $u =$ (donc $du =$)
D'où $\displaystyle\int_a^b \cos^n x \sin^p x dx = \int_{\sin a}^{\sin b} (1-u^2)^k u^p\ du.$
On sait calculer cette dernière intégrale puisque la fonction est polynomiale (développer les produits et puissances).
Si n est pair mais p est impair, on fera de même mais le changement de variable sera $u =$ (attention, car alors $du =$)

2ème cas : les deux puissances sont paires :
On linéarise $\cos^n x \sin^p x$. On obtient ainsi aisément une primitive, ce qui permet de calculer l'intégrale.

Exemples :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x dx$

2. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^3 x \sin^2 x$ sur

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x dx.$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx.$

4.2 Calcul de $\int_a^b P(x)\cos(\alpha x)dx$, $\int_a^b P(x)\sin(\alpha x)dx$, $\int_a^b P(x)\exp(\alpha x)dx$, où P est un polynôme à coefficients réels.

Exemple : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.

Principe : Effectuer des intégrations par parties successives en :
- dérivant le polynôme (ainsi, le degré est abaissé de 1 à chaque opération)
- intégrant la fonction sin (ou cos, ou exp).

Exercice 2. Calculer une primitive de $x \mapsto (1+x^2)\sin x$.

4.3 Complément : Calcul d'une primitive de $x \mapsto \dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$.

On recherche une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$, où $a,\ b,\ p,\ q \in \mathbb{R}$.
La première chose à faire est de déterminer la nature des racines du trinôme au dénominateur.
On note $\Delta = p^2 - 4q$ son discriminant.

1er cas : $\Delta > 0$: le trinôme possède deux racines réelle distinctes.
On note α et β les deux racines obtenues.
On a donc la factorisation suivante : $x^2 + px + q =$
On détermine deux réels λ et μ tels que :
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\},\ \dfrac{ax+b}{x^2+px+q} = \dfrac{\lambda}{x-\alpha} + \dfrac{\mu}{x-\beta}$.
Sous cette forme, on obtient facilement une primitive de f :

2ème cas : $\Delta = 0$: le trinôme possède une racine double.
On note α cette racine ($\alpha \in \mathbb{R}$).
On a donc la factorisation suivante : $x^2 + px + q =$
On détermine deux réels λ et μ tels que :
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\},\ \dfrac{ax+b}{x^2+px+q} = \dfrac{\lambda}{x-\alpha} + \dfrac{\mu}{(x-\alpha)^2}$.
Sous cette forme, on obtient facilement une primitive de f :

3ème cas : $\Delta < 0$: le trinôme n'a aucune racine réelle.

1. On se "débarrasse" du x au numérateur en faisant apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur :
   on écrit au numérateur : $ax + b = \qquad \underbrace{(2x+p)}_{\text{dérivée du dénominateur}} \qquad +$
2. À l'aide de la décomposition obtenue, on écrit ensuite la fonction comme une somme de deux fractions :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \underbrace{\dots\frac{\dots\dots\dots}{x^2+px+q}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\dots\dots\dots}{x^2+px+q}}_{(2)}$$

(1) La première fraction est du type

(2) Pour la seconde fraction, on doit mettre le trinôme $x^2 + px + q$ sous forme canonique puis reconnaître la dérivée d'une fonction $\arctan \circ v$, où v est une fonction affine à déterminer :

Exercice 3.
Déterminer l'ensemble des primitives (sur des intervalles à préciser) des fonctions suivantes :
$f : x \mapsto \dfrac{3x}{x^2+x-2}$, $g : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$, $h : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.