Intégration.

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

1.1 Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note I le point tel que $\vec{OI} = \vec{i}$ et J le point tel que $\vec{OJ} = \vec{j}$.
On appelle unité d'aire, et on note u.a., l'aire du carré construit sur les segments $[OI]$ et $[OJ]$.
Dans la suite, les aires seront exprimées en unités d'aires.

Définition 1 *Soient deux réels a et b tels que $a \leqslant b$.*
Soit f une fonction continue, positive sur le segment $[a, b]$.
On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,dt$, l'aire du domaine délimité par les droites d'équation $x = a$, $x = b$, $y = 0$, et la courbe représentative de f.

(admis)

Définition 2 *Soient deux réels a et b tels que $a \leqslant b$.*
Soit f une fonction continue, ***négative*** *sur le segment $[a, b]$.*
On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,dt$, ***l'opposé*** *de l'aire du domaine délimité par les droites d'équation $x = a$, $x = b$, $y = 0$, et la courbe représentative de f.*

(admis)

Définition 3 *Soient deux réels a et b tels que $a \leqslant b$.*
Soit f une fonction continue, sur le segment $[a, b]$. On note C_f sa courbe représentative.
On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$, la différence entre la somme des aires des domaines délimités par C_f situés au-dessus de l'axe des abscisses, et la somme des aires de ceux situés en-dessous de l'axe des abscisses.

(admis)

Définition 4 *Soit I un intervalle et soit f une fonction continue sur I. Soient a et b appartenant à I. Si $a > b$, on appelle intégrale de a à b de la fonction f, notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$, la quantité $\displaystyle -\int_b^a f(f)\ dt$ (définie précédemment). Donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = -\int_b^a f(t)\ dt$*

Remarques :

1. Nous avons donc défini l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. La dernière définition indique que l'intégrale est encore définie si dans l'intégrale, la borne du bas est supérieure à la borne du haut.
2. La lettre t est appelée variable d'intégration. C'est une variable muette qui peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre qui n'est pas déja utilisée :
3. Il découle de ces définitions que si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors pour tout $a \in I$, $\displaystyle\int_a^a f(t)\ dt = 0$.

1.2 Exemples.

1. Soit
$$f : \begin{array}{lcl} [0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x + 1 \end{array}.$$
Tracer le graphe de f. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.

2. Soit
$$g : \begin{array}{ccc} [0,3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-1}{2} \end{array}.$$
Tracer le graphe de g. Calculer $\displaystyle\int_0^3 g(t)\ dt$ puis $\displaystyle\int_3^0 g(t)\ dt$.

2 Calcul pratique d'une intégrale

2.1 Rappels : primitives d'une fonction continue

Définition 5 *Soit I un intervalle et soit f une fonction définie sur I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie sur I, dérivable sur I, et telle que $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.*

Exemples :

Proposition 1 *Toute fonction* ***continue*** *sur un intervalle I possède des primitives sur I.*

(admis)

Proposition 2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f admet une primitive F sur I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est :*
$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x)+\lambda \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
(admis)

2.2 Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, f désigne une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Cette fonction admet donc des primitives sur I. F désigne une primitive de f sur I. Les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto F(x) + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (constante).

f	F	I (intervalle(s) sur le(s)quel(s) on définit F)
$x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$ (ou plus grand, suivant la valeur de α).
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto x \ln x - x$	
$x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \dfrac{e^{ax}}{a}$	
$x \mapsto a^x (= e^{x \ln a})$ avec $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln a}$	
$x \mapsto \sin ax$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\dfrac{\cos ax}{a}$	
$x \mapsto \cos ax$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \dfrac{\sin ax}{a}$	
$x \mapsto \tan x \ (= \dfrac{\sin x}{\cos x})$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos x\rvert)$	
$x \mapsto \mathrm{Cotan} x \ (= \dfrac{\cos x}{\sin x})$	$x \mapsto \ln(\lvert\sin x\rvert)$	
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x} \ (= 1 + \tan^2 x)$	$x \mapsto \tan x$	
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan x$	

Exercice : Déterminer les primitives F des fonctions f suivantes. On pourra s'aider du tableau précédent.

f	F	I (intervalle de définition de F).
$x \mapsto x^3$		
$x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$		
$x \mapsto \ln(2x)$		
$x \mapsto (e^x)^3$		
$x \mapsto 2^x$		
$x \mapsto \cos^2 x$		
$x \mapsto \tan(2x)$		
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(3x)}$		
$x \mapsto \dfrac{1}{3+x^2}$		

.

2.3 Calculs d'intégrales

Proposition 3 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b appartenant à I. Soit F une primitive de f sur I. On a :*

.
$$\int_a^b f(t)\ dt = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\textit{noté } [F(t)]_a^b}.$$

Exemples : Retrouver les valeurs des intégrales

$$\int_0^1 2t + 1\ dt,\ \int_0^3 \frac{x-1}{2}\ dx, \int_3^0 \frac{x-1}{2}\ dx$$

3 Propriétés

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. a, b, c appartiennent à I et f et g sont des fonctions continues sur I.

Notation : On notera $\displaystyle\int_a^b f$ pour $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

3.1 Relation de Chasles

Proposition 4 $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Démonstration : f est continue sur I donc elle admet des primitives sur I et ces intégrales existent.

$$\int_a^c f + \int_c^b f = [F(t)]_a^c + [F(t)]_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f$$

Illustration :

3.2 Linéarité

Proposition 5 *Pour tous réels λ et μ,* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$

Démonstration :
Soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Les fonctions f, g, $\lambda f + \mu g$ sont continues sur I donc les intégrales $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b g$ existent.
f et g sont continues sur I donc elles admettent des primitives sur I. Soit F une primitive de f sur I, et G une primitive de g sur I.
Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I. Donc :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f + \mu g) &= [\lambda F(t) + \mu G(t)]_a^b \\
&= \lambda F(b) + \mu G(b) - (\lambda F(a) + \mu G(a)) \\
&= \lambda \underbrace{(F(b) - F(a))}_{\int_a^b f} + \mu \underbrace{(G(b) - G(a))}_{\int_a^b g} \\
&= \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g
\end{aligned}$$

3.3 Positivité, croissance

Proposition 6 ***positivité :*** *Si* $\left\{ \begin{array}{l} a \leqslant b \\ f \geqslant 0 \text{ sur } [a,b] \end{array} \right.$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

Démonstration : c'est une conséquence directe de la définition de l'intégrale de f sur $[a,b]$.

Illustration :

Proposition 7 ***Croissance :*** *Si* $\left\{ \begin{array}{l} a \leqslant b \\ f \leqslant g \text{ sur } [a,b] \end{array} \right.$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

Démonstration : On suppose que $a \leqslant b$ et que $f \leqslant g$ sur $[a,b]$.
Donc $g - f \geqslant 0$. La fonction $g - f$ est continue comme somme de fonctions continues, donc son intégrale entre a et b existe, et par **positivité** (proposition précédente) de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b g - f \geqslant 0$.
Or, par **linéarité** de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b g - f = \int_a^b g - \int_a^b f$. Ainsi, $\displaystyle\int_a^b g - \int_a^b f \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Illustration :

Application : Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_1^e (\ln t)^n \, dt$ est convergente.

Proposition 8 *Si* $\begin{cases} f \text{ est continue entre } a \text{ et } b, \\ f \geqslant 0 \text{ entre } a \text{ et } b, \\ f \text{ n'est pas identiquement nulle entre } a \text{ et } b \end{cases}$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

Illustration

3.4 Inégalité de la moyenne.

Définition 6 *Soit* f*une fonction continue sur un intervalle* I*. Soient* a *et* b *appartenant à* I *tels que* $a < b$*.*
On appelle valeur moyenne de f *entre* a *et* b *le réel* $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt$

Proposition 9 *Si* $\begin{cases} a < b \\ \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in [a, b], m \leqslant f(x) \leqslant M \end{cases}$, *alors* $\displaystyle m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant M$.

Proposition 10 *Si f est continue et $a < b$, il existe $c \in [a,b]$ tel que* $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f = f(c)$.
En d'autres termes, la valeur moyenne appartient à l'ensemble des valeurs atteintes par la fonction.

Démonstration :
On suppose que f est continue et que $a < b$.
Posons

$$\begin{array}{cccc} F: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array}$$

F est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a, donc F est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$. Ainsi :
- F est continue sur $[a,b]$,
- F est dérivable sur $]a,b[$,

Donc d'après la formule des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c)$.
Or $F' = f$, donc $F'(c) = f(c)$, et $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$. Donc $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f = f(c)$.

3.5 Inégalité triangulaire continue.

Proposition 11 *Si $a \leqslant b$, alors* $|\displaystyle\int_a^b f| \leqslant \int_a^b |f|$.

Démonstration :
Rappels :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leqslant x \leqslant |x|$
2. $|x| \leqslant A \Longleftrightarrow -A \leqslant x \leqslant A$

$\forall t \in [a,b],\ -|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$ (d'après le rappel 1)
Ces trois fonctions sont continues sur $[a,b]$ car f est continue sur $[a,b]$. Donc leurs intégrales entre a et b existent, et par croissance (et linéarité) de l'intégrale :

$$\underbrace{-\int_a^b |f(t)|\ dt}_{-A} \leqslant \int_a^b f(t)\ dt \leqslant \underbrace{\int_a^b |f(t)|\ dt}_{A}$$

On en déduit (d'après le rappel 2) :

$$\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ dt$$

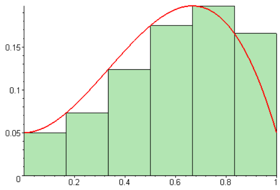
4 Sommes de Riemann.

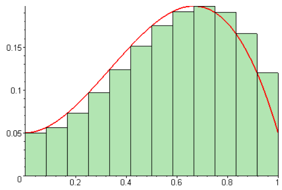
4.1 Principe

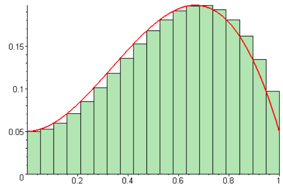
Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Soit n un entier naturel non nul.
Soient $x_0, ..., x_n$ $n+1$ nombres réels tels que :

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_n = b, \\ x_0 < x_1 < ... < x_n. \end{cases}$$

On peut approcher l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ par la somme des aires algébriques des n rectangles $[x_k, x_{k+1}] \times [0, f(x_k)]$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.







Remarque : Intuitivement, on comprend que si on fait tendre chaque distance $|x_{k+1} - x_k|$ vers 0 (et dans ce cas, n tend vers $+\infty$), la somme des aires tend vers $\int_a^b f(t)\ dt$.

Définitions : Une telle suite finie $x_0, ..., x_n$ est appelée **subdivision** du segment $[a, b]$. La somme des aires des rectangles définis plus haut est $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$. Cette quantité est appelée **somme de Riemann de f associée à la subdivision** $x_0, ..., x_n$.

4.2 Convergence des sommes de Riemann.

Si maintenant, nous prenons des x_k régulièrement espacés entre a et b (c'est à dire que l'on divise le segment $[a, b]$ en n intervalles de longueur $\dfrac{b-a}{n}$, on obtient :
$x_0 = a$,
$x_1 = a + \dfrac{b-a}{n}$,

$x_2 =$

$\forall k \in [\![0, n]\!],\ x_k =$
$x_n = b$.
La somme de Riemann associée à cette subdivision est alors :

D'après la remarque précédente, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 1 ***(Convergence des sommes de Riemann)*** *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\ dt.$$

(admis)
En particulier, si $a = 0$ et $b = 1$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1 *Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)\ dt.$$

En pratique, on pourra toujours se ramener à l'application de ce corollaire à la place du théorème précédent. Il suffira de choisir **la bonne fonction**.

Remarques

1. **Quand appliquer ce corollaire ?**
   - Dans certains exercices : quand on doit calculer la limite d'une suite (u_n) qui s'écrit sous forme de somme (pour k allant de 0 à $n-1$, dans laquelle on peut faire apparaître $\frac{k}{n}$ pour reconnaître $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$.
   - en informatique : pour calculer une valeur approchée d'une intégrale qu'on ne sait pas calculer de manière exacte. On aura besoin de ...

2. Si les bornes de la somme sont "légèrement différentes" de celles du corollaire, on fait apparaître la somme $\sum_{k=0}^{n-1}$, et il reste un nombre fini de termes qui tendent vers 0.

Exemples :

1. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$ converge et déterminer sa limite.

2. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ converge et déterminer sa limite.