

INTÉGRALES ET PRIMITIVES.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], \frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$.
2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$. (on pourra considérer la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ et encadrer son intégrale sur $[k, k+1]$).
2. En déduire un encadrement de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 3.

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 2]$. Étudier la limite, quand x tend vers 1 de $\frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt$.
On pourra introduire une primitive de f sur $[0, 2]$ après avoir justifié son existence, et exprimer l'intégrale à l'aide de cette primitive.
2. Application : déterminer la limite, quand x tend vers 1 de $\frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^3}{1+t^3} dt$.

Exercice 4. Sommes de Riemann : Étudier les limites des suites :

1. $u_n = \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right]$,
2. $v_n = n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right)$,
3. $w_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$,
4. $x_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)}$.

Exercice 5. Calculer :

$$\int_0^1 (2x^2 + 3x - 5) dx, \int_1^y (x-1)\sqrt{x} dx, \int_1^2 \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx, \int_0^2 \frac{x+3}{x+1} dx \quad (1),$$

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1} dx, \int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx, \int_0^y \frac{e^x}{1+e^x} dx, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \quad (2)$$

$$\int_0^\pi (1 + \cos^2 x) \sin x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx, \int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx, \int_0^y \frac{1}{x^2+2} dx, (3), \int_0^1 x\sqrt{1+x} dx \quad (4)$$

Indications :

- (1) Écrire : $x + 3 = (x + 1) + 2$.
- (2) Pour toute la ligne, reconnaître $\frac{u'}{u}$ (s'intègre en $\ln |u|$).
- (3) Écrire $\frac{1}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2 + 1}$ et penser à la dérivée de \arctan .
- (4) Écrire $x\sqrt{1+x} = (x+1-1)\sqrt{1+x} = (x+1)^\alpha - \sqrt{1+x}$. (α à déterminer).

Exercice 6. Intégration par parties :

Rappel : Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

exemple : $\int_a^b t \sin t dt = [(-\cos t)t]_a^b - \int_a^b (-\cos t) dt$ (on a posé $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = t$).

Calculer : $\int_1^x \ln t dt$, $\int_0^1 te^{3t} dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2t) dt$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \sin(2t) dt$

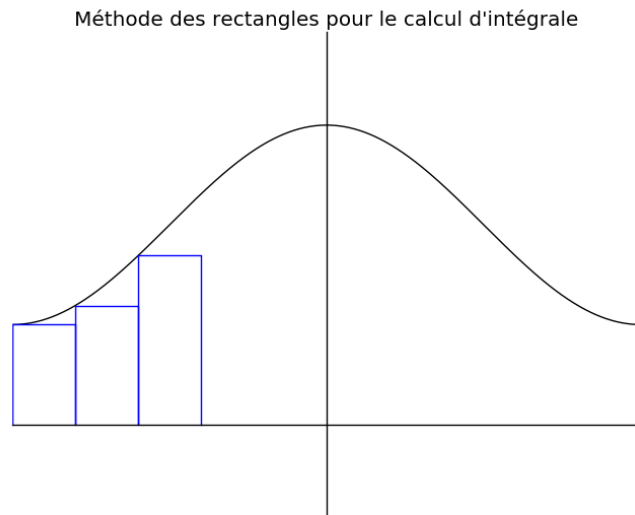
Exercice 7. Intégration par parties :

1. Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ et préciser sur quel intervalle elle est définie.
(*indication :* au numérateur, écrire $t^2 = (t^2 + 1) - 1$).
2. Calculer $\int_0^1 t \operatorname{Arctant} dt$. On fera une intégration par parties.

Exercice 8. Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$, alors le théorème de convergence

des sommes de Riemann dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{(b-a)}{n}) = \int_a^b f(t) dt$.

Chaque terme $\frac{(b-a)}{n} f(a + k \frac{(b-a)}{n})$ de la somme représente l'aire (algébrique) d'un petit rectangle :



On peut donc calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment en calculant la somme suivante, appelée **somme de Riemann associée à f** :

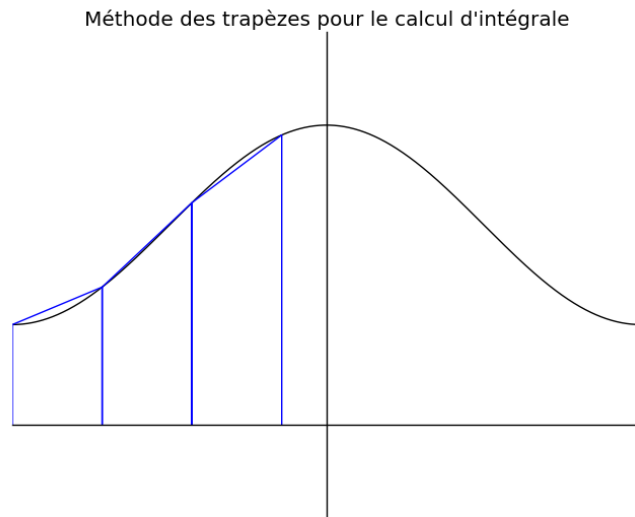
$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{(b-a)}{n}).$$

1. Écrire une fonction Python **rectangles(f,n,a,b)** qui calcule la somme de Riemann R_n d'une fonction f sur le segment $[a, b]$:

$$R_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{(b-a)}{n}\right).$$

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{4}{x^2 + 1}$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$?
3. On peut montrer que si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors l'erreur commise ($|R_n - \int_a^b f(t) dt|$) est majorée par $\frac{(b-a)^3 \sup\{|f'(x)| | x \in [a, b]\}}{2n}$. En admettant que $|f'|$ est majorée par 3, en déduire un entier n pour lequel R_n est une valeur approchée de π à 10^{-3} près.

Exercice 9. On peut améliorer l'approximation précédente en remplaçant les rectangles par des trapèzes de sommets $(x_k, 0)$, $(x_{k+1}, 0)$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, $(x_k, f(x_k))$, où on a posé $\forall k \in \{0..n\}$, $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.



On prend alors pour valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$ la somme T_n des aires des petits trapèzes ainsi construits.

1. Rappeler l'aire d'un trapèze et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^n$, la somme T_n . (en fonction de f , a , b).
2. Écrire une fonction Python **trapezes(f,n,a,b)** qui calcule la somme T_n , pour une fonction f donnée, entre a et b .