

CALCULS DE PRIMITIVES.

Conseil : dans ce chapitre, nous avons découvert deux nouvelles techniques pour calculer des **intégrales** :

- l'intégration par parties,
- le changement de variable.

On peut appliquer ces techniques pour calculer une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle I . Il suffit pour cela de se ramener à une intégrale :

Pour calculer une primitive de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$:

Soit a un élément de I . La fonction :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a (voir début du cours "Calculs de Primitives").

Soit $x \in I$ fixé quelconque. Calculons

$$\int_a^x f(t) dt$$

... là, on peut faire un changement de variable, une IPP...

Exemple : Primitive de $x \mapsto xe^x$ (ex1)

La fonction $x \mapsto xe^x$ est continue sur \mathbb{R} donc elle admet des primitives sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x te^t dt \end{aligned}$$

est l'unique primitive de $x \mapsto xe^x$ sur \mathbb{R} qui s'annule en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Calculons

$$\int_0^x te^t dt$$

On effectue une IPP en posant :

$$\begin{cases} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{cases}$$

u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R} donc sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$).

D'où :

$$\int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - [e^t]_0^x = xe^x - e^x + 1$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = xe^x - e^x + 1$.

On a trouvé une primitive F de $x \mapsto xe^x$ sur \mathbb{R} . On en déduit l'ensemble des primitives de $x \mapsto xe^x$ sur \mathbb{R} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^x - e^x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Exercice 1. Déterminer les primitives des fonctions suivantes, sur des intervalles à préciser :

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x-2}, \quad x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

$$x \mapsto x^3 e^{x^2} \text{ (par chgt de variable } u = t^2), \quad x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ (par chgt de variable } t = \tan u).$$

$$x \mapsto xe^x \quad x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx \text{ (poser } t = \cos x), \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx. \text{ (poser } t = \sin x).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx. \text{ (poser } t = \tan x), \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx. \text{ (poser } x = \cos 2t \text{ et utiliser formule de trigo).}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4 - x^2 - 2} dx. \text{ (poser } x^2 = t), \quad \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx. \text{ (poser } t = \ln x). (n \in \mathbb{N}^* \text{ est fixé).}$$

Exercice 3. Calculer :

$$\int_0^1 \frac{1}{2-x^2} dx \quad \int_0^\pi \sin x \cos 3x dx \quad \int_1^3 \sqrt{x} \ln x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx,$$
$$\int_0^y e^x \sin x dx, \quad \int_1^y \sin(\ln x) dx.$$