Intégrales et primitives.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ \dfrac{t^n}{2} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$. (on pourra considérer la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et encadrer son intégrale sur $[k, k+1]$).
2. En déduire un encadrement de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 3.

1. Soit f une fonction continue sur $[0,2]$. Étudier la limite, quand x tend vers 1 de $\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x f(t)dt$.
   On pourra introduire une primitive de f sur $[0,2]$ après avoir justifié son existence, et exprimer l'intégrale à l'aide de cette primitive.
2. Application : déterminer la limite, quand x tend vers 1 de $\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x \frac{t^3}{1+t^3}dt$.

Exercice 4. Sommes de Riemann : Étudier les limites des suites :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + ... + \sin\dfrac{n\pi}{n}\right]$,
2. $v_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} ... + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$,
3. $w_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$,
4. $x_n = \sqrt[n]{\left(1+(\frac{1}{n})\right)\left(1+(\frac{2}{n})\right)...\left(1+(\frac{n}{n})\right)}$.

Exercice 5. Calculer :

$$\int_0^1 (2x^2+3x-5)\,dx,\ \int_1^y (x-1)\sqrt{x}\,dx,\ \int_1^2 \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx,\ \int_0^2 \frac{x+3}{x+1}dx\ (1),$$

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1}\,dx,\ \int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx,\ \int_0^y \frac{e^x}{1+e^x}\,dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx\ (2)$$

$$\int_0^\pi (1+\cos^2 x)\sin x\,dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx,\ \int_0^\pi \sin^2 x\cos^2 x\,dx.$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx,\ \int_0^y \frac{1}{x^2+2}\,dx,\ (3),\ \int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx\ (4)$$

Indications :
(1) Écrire : $x+3=(x+1)+2$.
(2) Pour toute la ligne, reconnaître $\dfrac{u'}{u}$ (s'intègre en $\ln|u|$).
(3) Écrire $\dfrac{1}{x^2+2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}$ et penser à la dérivée de arctan.
(4) Écrire $x\sqrt{1+x} = (x+1-1)\sqrt{1+x} = (x+1)^\alpha - \sqrt{1+x}$. ($\alpha$ à déterminer).

Exercice 6. Intégration par parties :
Rappel : Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ dt.$$

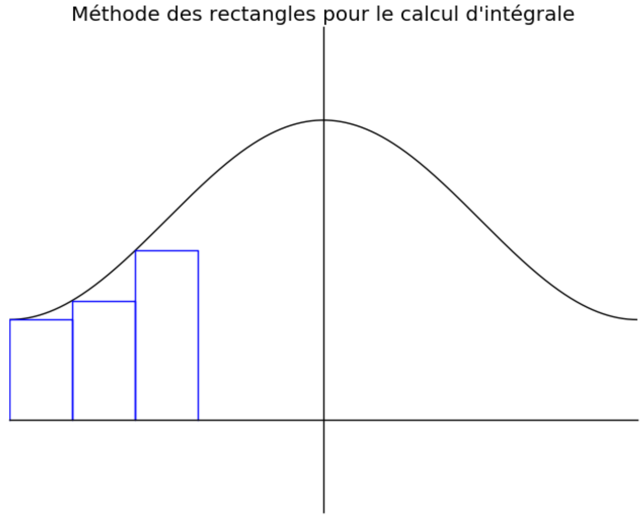
exemple : $\int_a^b t\sin t\ dt = [(-\cos t)t]_a^b - \int_a^b (-\cos t)\ dt$ (on a posé $u(t)=-\cos t$ et $v(t)=t$).
Calculer : $\int_1^x \ln t\ dt,\ \int_0^1 te^{3t}\ dt,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)\ dt,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3\sin(2t)\ dt$

Exercice 7. Intégration par parties :

1. Déterminer une primitive de $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^2}$ et préciser sur quel intervalle elle est définie.
(*indication :* au numérateur, écrire $t^2 = (t^2+1)-1$).
2. Calculer $\int_0^1 t\mathrm{Arctan}t\ dt$. On fera une intégration par parties.

Exercice 8. Si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$, alors le théorème de convergence des sommes de Riemann dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(b-a)}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(a+k\dfrac{(b-a)}{n}) = \int_a^b f(t)\ dt$.
Chaque terme $\dfrac{(b-a)}{n}f(a+k\dfrac{(b-a)}{n})$ de la somme représente l'aire (algébrique) d'un petit rectangle :

Méthode des rectangles pour le calcul d'intégrale



On peut donc calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment en calculant la somme suivante, appelée **somme de Riemann associée à f** :

$$R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{(b-a)}{n}).$$

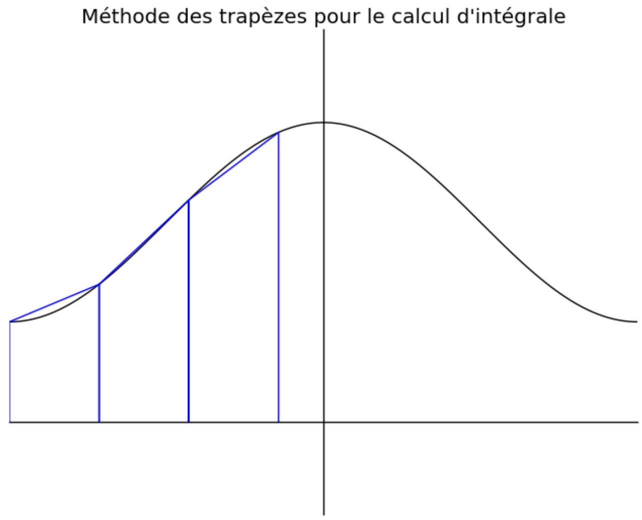
1. Écrire une fonction Python **rectangles(f,n,a,b)** qui calcule la somme de Riemann R_n d'une fonction f sur le segment $[a,b]$:

$$R_n(f) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{(b-a)}{n}).$$

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4}{x^2+1}$.Quelle est la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$?

3. On peut montrer que si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, alors l'erreur commise ($\left|R_n - \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt\right|$) est majorée par $\dfrac{(b-a)^3 \sup\{|f'(x)| | x\in[a,b]\}}{2n}$. En admettant que $|f'|$ est majorée par 3, en déduire un entier n pour lequel R_n est une valeur approchée de π à 10^{-3} près.

Exercice 9. On peut améliorer l'approximation précédente en remplaçant les rectangles par des trapèzes de sommets $(x_k,0)$, $(x_{k+1},0)$, $(x_{k+1},f(x_{k+1}))$, $(x_k,f(x_k))$,
où on a posé $\forall k\in\{0..n\}$, $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.



On prend alors pour valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ la somme T_n des aires des petits trapèzes ainsi construits.

1. Rappeler l'aire d'un trapèze et déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^n$, la somme T_n. (en fonction de f, a, b).
2. Écrire une fonction Python **trapezes(f,n,a,b)** qui calcule la somme T_n, pour une fonction f donnée, entre a et b.

Exercice 5.

Toutes les fonctions à intégrer sont continues sur les intervalles considérés, donc ces intégrales sont bien définies. $\displaystyle\int_0^1 (2x^2+3x-5)\ dx = \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-5x\right]_0^1 = -\frac{17}{6}$.

$\displaystyle\int_1^y (x-1)\sqrt{x}\ dx = \int_1^y x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\ dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^y$

$\displaystyle\int_1^2 \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{1-2x+x^2}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}}\ dx = \left[2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^2 = \frac{14}{15}\sqrt{2} - \frac{16}{15}$.

$\displaystyle\int_0^2 \frac{x+3}{x+1}dx = \int_0^2 \frac{(x+1)+2}{x+1}\ dx = \int_0^2 1 + \frac{2}{x+1}\ dx = [x+2\ln|x+1|]_0^2 = 2+2\ln 3$.

$\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1}\ dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\ dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2}\ln 2$. (cette intégrale peut aussi se calculer en effectuant le changement de variable $t = x^2+1$).

$\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\ dx = \left[\ln|x^2+x+2|\right]_0^2 = 2\ln 2$ (cette intégrale peut aussi se calculer en effectuant le changement de variable $t = x^2+x+2$).

$\displaystyle\int_0^y \frac{e^x}{1+e^x}\ dx = [\ln|1+e^x|]_0^y$. (cette intégrale peut aussi se calculer en effectuant le changement de variable $t = e^x$).

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = [-\ln|cosx|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln 2$ (cette intégrale peut aussi se calculer en effectuant le changement de variable $t = \cos x$).

$\displaystyle\int_0^\pi (1+\cos^2 x)\sin x\ dx = -\int_0^\pi (1+\cos^2 x)(-\sin x)\ dx = -\left[\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^\pi = \frac{8}{3}$ (cette intégrale peut aussi se calculer en effectuant le changement de variable $t = \cos x$).

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\ dx$? Linéarisons $\sin^3 x$: $\displaystyle\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{(2i)^3}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = \frac{1}{(2i)^2}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)$. D'où :

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\ dx = \left[-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$.

$\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\cos^2 x\ dx$? Linéarisons $\sin^2 x\cos^2 x$: $\displaystyle\sin^2 x\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{-1}{16}(e^{2ix} - e^{-2ix})^2 = \frac{-1}{16}(e^{4ix}+e^{-4ix}-2) = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$. Ainsi :

$\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\cos^2 x\ dx = \int_0^\pi \frac{1}{8}(1-\cos 4x)\ dx = \left[\frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{8}$.

$\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\ dx = \int_1^2 u(x)u'(x)\ dx$, avec $u : x \mapsto \ln x$. Or $\displaystyle\int_1^2 u(x)u'(x)\ dx = \left[\frac{1}{2}u(x)^2\right]_1^2$. D'où :

$\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\ dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

$\displaystyle\int_0^y \frac{1}{x^2+2}\ dx = \int_0^y \frac{1}{2(1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2)}\ dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^y$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\ dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}\ dx = \left[\text{Arcsin}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

$\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x}\ dx = \int_0^1 (x+1-1)\sqrt{1+x}\ dx = \int_0^1 (x+1)\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x}\ dx = \int_0^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x}\ dx = \left[\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$.