Calculs de primitives.

Conseil : dans ce chapitre, nous avons découvert deux nouvelles techniques pour calculer des **intégrales** :

- l'intégration par parties,
- le changement de variable.

On peut appliquer ces techniques pour calculer une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle I. Il suffit pour cela de se ramener à une intégrale :

Pour calculer une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$:

Soit a un élément de I. La fonction :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a (voir début du cours "Calculs de Primitives").

Soit $x \in I$ fixé quelconque. Calculons

$$\int_a^x f(t)\ dt$$

... là, on peut faire un changement de variable, une IPP...

Exemple : Primitive de $x \mapsto xe^x$ (ex1)

La fonction $x \mapsto xe^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x te^t\ dt \end{array}$$

est l'unique primitive de $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Calculons

$$\int_0^x te^t\ dt$$

On effectue une IPP en posant :

$$\begin{cases} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{cases}$$

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$).

D'où :
$$\int_0^x te^t\ dt = \left[te^t\right]_0^x - \int_0^x e^t\ dt = xe^x - \left[e^t\right]_0^x = xe^x - e^x + 1$$
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = xe^x - e^x + 1$.

On a trouvé une primitive F de $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'ensemble des primitives de $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$:
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x - e^x + \lambda \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 1. Déterminer les primitives des fonctions suivantes, sur des intervalles à préciser :

$x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$, $\qquad x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

$x \mapsto x^3 e^{x^2}$ (par chgt de variable $u = t^2$), $\qquad x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (par chgt de variable $t = \tan u$).

$x \mapsto xe^x$ $\qquad x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\ dx$ (poser $t = \cos x$). $\qquad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x\ dx$. (poser $t = \sin x$).

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 x}\ dx$. (poser $t = \tan x$). $\qquad \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ dx$. (poser $x = \cos 2t$ et utiliser formule de trigo).

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4 - x^2 - 2}\ dx$. (poser $x^2 = t$). $\qquad \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\ dx$. (poser $t = \ln x$).($n \in \mathbb{N}^*$ est fixé).

Exercice 3. Calculer :

$$\int_0^1 \frac{1}{2-x^2}\ dx \qquad \int_0^{\pi} \sin x \cos 3x\ dx \qquad \int_1^3 \sqrt{x} \ln x\ dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\ dx,$$

$$\int_0^y e^x \sin x\ dx, \qquad \int_1^y \sin(\ln x)\ dx.$$

Corrigé.

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

• $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-x^2}\ dx$:

$\dfrac{1}{2-x^2}$: le trinôme au dénominateur a 2 racines réelles $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. (cadre : voir le complément du cours "calculs de primitives") On cherche deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{2-x^2} = \frac{a}{x-\sqrt{2}} + \frac{b}{x+\sqrt{2}}$$

Ainsi :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-x^2}\ dx = \int_0^1 \frac{-\sqrt{2}}{4}\frac{1}{x-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{x+\sqrt{2}}\ dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\Big[-\ln|x-\sqrt{2}| + \ln|x+\sqrt{2}|\Big]_0^1.$

• $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\cos 3x\ dx.$

On linéarise :
$\sin x\cos 3x = \dfrac{(e^{ix}-e^{-ix})}{2i}\dfrac{(e^{3ix}+e^{-3ix})}{2} = \dfrac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x).$

D'où $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\cos 3x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 4x - \sin 2x\ dx = \frac{1}{2}[-\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2}]_0^\pi = 0.$

• $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x}\ln x\ dx$:

effectuons une IPP en posant : $\forall x\in[1,3],\ u(x)=\ln x, v'(x)=\sqrt{x},\ u'(x)=\dfrac{1}{x},\ v(x)=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$

u et v sont de classe C^1 sur $[1,3]$.

$\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x}\ln x\ dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x]_1^3 - \int_1^3 \frac{2}{3}\sqrt{x}\ dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x]_1^3 - [\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}]_1^3.$

• $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\ dx$:

effectuons une IPP en posant : $\forall x\in[0,\dfrac{\pi}{4}],\ u(x)=x, v'(x)=\dfrac{1}{\cos^x},\ u'(x)=1,\ v(x)=\tan x.$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,\dfrac{\pi}{4}]$.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\ dx = [x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\ dx = \frac{\pi}{4} - [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$

• $I(y) = \displaystyle\int_0^y e^x\sin x\ dx$ est définie pour tout $y\in\mathbb{R}$ car $x\mapsto e^x\sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Effectuons une IPP en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = e^x,\ v(x) = \sin x,\ u(x) = e^x,\ v'(x) = \cos x$. u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
$I(y) = [e^x \sin x]_0^y - \displaystyle\int_0^y e^x \cos x\ dx = e^y \sin y - \int_0^y e^x \cos x\ dx$.
Calculons $\displaystyle\int_0^y e^x \cos x\ dx$ par IPP en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = e^x,\ v(x) = \cos x,\ u(x) = e^x,\ v'(x) = -\sin x$. u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
$\displaystyle\int_0^y e^x \cos x\ dx = [e^x \cos x]_0^y - \int_0^y e^x(-\sin x)\ dx = e^y \cos y - 1 + I(y)$.
Ainsi, en reprenant l'expression de départ, on a :
$I(y) = e^y \sin y - e^y \cos y + 1 - I(y)$.
D'où : $2I(y) = e^y \sin y - e^y \cos y + 1$, et $I(y) = \dfrac{1}{2}\left(e^y \sin y - e^y \cos y + 1\right)$.

- $I(y) = \displaystyle\int_1^y \sin(\ln x)\ dx$.

$x \mapsto \sin(\ln x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc cette intégrale est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Nous allons calculer cette intégrale de la même façon que pour le calcul précédent : par deux IPP successives.
Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u(x) = \sin(\ln x),\ v'(x) = 1,\ u'(x) = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x),\ v(x) = x$. u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
$I(y) = [x \sin(\ln x)]_1^y - \displaystyle\int_1^y \cos(\ln x)\ dx$.
Calculons $\displaystyle\int_1^y \cos(\ln x)\ dx$ par IPP en posant :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u(x) = \cos(\ln x),\ v'(x) = 1,\ u'(x) = -\dfrac{1}{x}\sin(\ln x),\ v(x) = x$. u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\displaystyle\int_1^y \cos(\ln x)\ dx = [x \cos(\ln x)]_1^y + \int_1^y \sin(\ln x)\ dx = y\cos(\ln y) - 1 + I(y)$.
D'où : $I(y) = y \sin(\ln y) - y\cos(\ln y) + 1 - I(y)$. Donc $2I(y) = y\sin(\ln y) - y\cos(\ln y) + 1$. Ainsi, $I(y) = \dfrac{1}{2}[y\sin(\ln y) - y\cos(\ln y) + 1]$.