

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 25 - SUJET A - LUNDI 8 JUIN 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes. On ne justifiera pas leur existence.

1. $I = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{2 + \cos(t)} dt$ à l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$.

2. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t) dt$ à l'aide d'un changement de variable.

① (a) On pose $x = \cos t$, la fonction $t \mapsto \cos(t)$ est de classe C^1 sur $(0, \pi)$

(b) $dx = -\sin(t) dt$

(c) bornes :

t	$x = \cos(t)$
bas 0	1
haut π	-1

(d) D'après : $I = \int_1^{-1} \frac{-dx}{2+x} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2+x} = \left[\ln|2+x| \right]_{-1}^1 = \ln 3$

② $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t) \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t))^2 \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))^2 \cos(t) dt$

(a) On pose $x = \sin(t)$ - la fonction $t \mapsto \sin(t)$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

(b) $dt = \cos(x) dx$

(c) bornes :

t	$x = \sin(t)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1

(d) d'après : $J = \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 dx = \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

Donc $J = \frac{8}{15}$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que l'intégrale I_n est bien définie.
2. Calculer I_0 et I_1 .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
4. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
5. Montrer que la suite (I_n) converge et que sa limite, notée ℓ , appartient à \mathbb{R}_+ .
6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$.
7. En déduire que $\ell = 0$ (on pourra faire un raisonnement par l'absurde).
8. Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

1, 2, 3, 4, 5: voir sujet B

⑥ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. calculons I_{n+1} par IPP en posant:

$$\begin{cases} u'(t) = e^{-t} & u(t) = -e^{-t} \\ v(t) = t^{n+1} & v'(t) = (n+1)t^n \end{cases}$$

$$u, v \in \mathcal{C}^1([0, 1])$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } I_{n+1} &= \left[-t^{n+1} e^{-t} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 t^n e^{-t} dt \\ &= -e^{-1} + (n+1)I_n \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$$

⑦ voir S.B

⑧ d'après ⑥, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n = \frac{1}{e} + I_{n+1}$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n = \frac{1}{e}$$

$$\text{On en déduit } (n+1)I_n \sim \frac{1}{e} \text{ car } \frac{1}{e} \neq 0$$

$$\text{D'où } I_n \sim \frac{1}{e(n+1)}$$

$$\text{Or } n+1 \sim n \text{ donc par quotient des équivalents, } \frac{1}{e(n+1)} \sim \frac{1}{en}$$

$$\text{Ainsi, } I_n \sim \frac{1}{en}$$

⑧ (sujet B) d'après ⑥, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $pJ_{p-1} = J_p + \frac{1}{e}$

$$\text{Or } \lim_{p \rightarrow +\infty} J_p = 0 \text{ donc } \lim_{p \rightarrow +\infty} pJ_{p-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{On en déduit } pJ_{p-1} \sim \frac{1}{e} \text{ (car } \frac{1}{e} \neq 0)$$

$$\text{d'où } J_{p-1} \sim \frac{1}{ep}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 25 - SUJET B - LUNDI 8 JUIN 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes. On ne justifiera pas leur existence.

1. $I = \int_0^\pi \frac{\cos(t)}{3 - \sin(t)} dt$ à l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$.

2. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(t) dt$ à l'aide d'un changement de variable.

① (a) On pose $x = \sin(t)$. La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$

(b) $dx = \cos(t) dt$

(c) bornes:

t	$x = \sin(t)$
0	0
π	0

(d) $I = \int_0^0 \frac{dx}{3-x} = \left[\ln|3-x| \right]_0^0 = 0$

② $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(t))^2 \sin(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t))^2 \sin(t) dt$

(a) On pose $x = \cos(t)$. La fonction $t \mapsto \cos(t)$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

(b) $dx = -\sin(t) dt$

(c) bornes:

t	$x = \cos(t)$
bas 0	1
haut $\frac{\pi}{2}$	0

(d) D'où $J = \int_1^0 -(1-x^2)^2 dx = \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 dx$
 $= \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

Ainsi, $J = \frac{8}{15}$

Exercice 2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit $J_p = \int_0^1 t^p e^{-t} dt$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que l'intégrale J_p est bien définie.
2. Calculer J_0 et J_1 .
3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $J_p \geq 0$.
4. Montrer que la suite (J_p) est décroissante.
5. Montrer que la suite (J_p) converge et que sa limite, notée ℓ , appartient à \mathbb{R}_+ .
6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_p = pJ_{p-1} - \frac{1}{e}$.
7. En déduire que $\ell = 0$ (on pourra faire un raisonnement par l'absurde).
8. Déterminer un équivalent de J_p quand p tend vers $+\infty$.

① $t \mapsto t^p e^{-t}$ est continue sur $[0, 1]$ donc cette intégrale existe

② $J_0 = \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$

$J_1 = \int_0^1 t e^{-t} dt$ on effectue une IPP en posant: $\begin{cases} u(t) = e^{-t} & u'(t) = -e^{-t} \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{cases}$

d'où $J_1 = [-t e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt = -e^{-1} + [-e^{-t}]_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$

donc $J_1 = 1 - \frac{2}{e}$

③ $\forall t \in [0, 1], t^p e^{-t} \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, $\underbrace{\int_0^1 t^p e^{-t} dt}_{J_p} \geq 0$

④ Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$\forall t \in [0, 1], t^{p+1} e^{-t} - t^p e^{-t} = \underbrace{t^p e^{-t}}_{\geq 0} \underbrace{(t-1)}_{\leq 0} \leq 0$

donc $\int_0^1 t^{p+1} e^{-t} - t^p e^{-t} dt \leq 0$ par positivité de l'intégrale ($0 \leq 1$ bornes)

donc $\int_0^1 t^{p+1} e^{-t} dt - \int_0^1 t^p e^{-t} dt \leq 0$, donc $J_{p+1} \leq J_p$

Ainsi, la suite (J_p) est décroissante.

⑤ (J_p) est décroissante, minorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente. On note ℓ sa limite.

$\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} 0 \leq J_p \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} J_p = \ell \end{cases}$ donc par passage à la limite dans l'inégalité, $\ell \geq 0$ donc $\ell \in \mathbb{R}_+$

⑥ Calculons J_p par IPP en posant: $\begin{cases} u(t) = e^{-t} & u'(t) = -e^{-t} \\ v(t) = t^p & v'(t) = p t^{p-1} \end{cases}$

d'où $J_p = [-t^p e^{-t}]_0^1 + p \int_0^1 t^{p-1} e^{-t} dt$ donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $J_p = p J_{p-1} - \frac{1}{e}$

⑦ On suppose que $\ell > 0$. Par produit des limites, on obtient $\lim_{p \rightarrow +\infty} p J_{p-1} = +\infty$

et par somme des limites, $\lim_{p \rightarrow +\infty} J_p = +\infty$ contradiction car (J_p) converge.

On en déduit $\ell \leq 0$. Or nous avons montré que $\ell \in \mathbb{R}_+$ - d'où $\ell = 0$

⑧ voir S.A