

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 25 - SUJET A - LUNDI 8 JUIN 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes. On ne justifiera pas leur existence.

1. $I = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{2 + \cos(t)} dt$ à l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$.

2. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t) dt$ à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que l'intégrale I_n est bien définie.
2. Calculer I_0 et I_1 .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
4. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
5. Montrer que la suite (I_n) converge et que sa limite, notée ℓ , appartient à \mathbb{R}_+ .
6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$.
7. En déduire que $\ell = 0$ (on pourra faire un raisonnement par l'absurde).
8. Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 25 - SUJET B - LUNDI 8 JUIN 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes. On ne justifiera pas leur existence.

1. $I = \int_0^\pi \frac{\cos(t)}{3 - \sin(t)} dt$ à l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$.

2. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(t) dt$ à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit $J_p = \int_0^1 t^p e^{-t} dt$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que l'intégrale J_p est bien définie.
2. Calculer J_0 et J_1 .
3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $J_p \geq 0$.
4. Montrer que la suite (J_p) est décroissante.
5. Montrer que la suite (J_p) converge et que sa limite, notée ℓ , appartient à \mathbb{R}_+ .
6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_p = pJ_{p-1} - \frac{1}{e}$.
7. En déduire que $\ell = 0$ (on pourra faire un raisonnement par l'absurde).
8. Déterminer un équivalent de J_p quand p tend vers $+\infty$.