

### 1 Exercice 1 - Intégrales de Wallis, formule de Stirling

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$ .

1. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $W_n$  est bien définie.
2. Calculer  $W_0$  et  $W_1$ .
3. (a) Montrer que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.  
 (b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $W_n > 0$ .  
 (c) Que peut-on déduire des deux questions précédentes sur la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?
4. (a) Montrer que pour tout  $n$  entier naturel,  $W_{n+2} = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t dt$ , puis en effectuant une intégration par parties dans cette dernière intégrale, que :  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ .  
 (b) En déduire que la suite  $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante, puis que pour tout  $n$  entier naturel,  $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0$ .
5. (a) Montrer que pour tout  $n$  entier naturel,  $W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}W_n$ .  
 (b) En déduire  $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$  puis :  $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .

### Exercice 2

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \int_1^e t^2 \ln^n(t) dt$ .

1. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'intégrale  $I_n$  existe.
2. Calculer  $I_1$ . On pourra faire une intégration par parties.
3. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante, positive.
4. Montrer que la suite  $(I_n)$  converge et donner un encadrement de sa limite.
5. Trouver une relation entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$ .  
 On pourra faire une intégration par parties dans  $I_{n+1}$  en dérivant  $t \mapsto \ln^{n+1}(t)$  et en intégrant  $t \mapsto t^2$ .
6. En déduire la limite de  $(I_n)$  puis un équivalent de  $I_n$ .

**MATHÉMATIQUES**  
**MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT (2025)**  
Durée : 2 heures

**Partie I : Autour d'une intégrale**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels. On définit :

$$f_{a,b} : x \mapsto x^a(1-x)^b \quad \text{et} \quad I_{a,b} = \int_0^1 f_{a,b}(x) dx.$$

1. Représenter graphiquement les fonctions  $f_{1,1}$  et  $f_{2,1}$  sur le segment  $[0,1]$ .
2. Calculer  $I_{0,n}$  pour tout entier naturel  $n$ .
3. Soit  $(a,b) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $a \neq 0$ . Trouver une relation entre  $I_{a,b}$  et  $I_{a-1,b+1}$ .
4. En déduire que pour tout  $a \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall b \in \mathbb{N}, I_{a,b} = \frac{a! b!}{(a+b+1)!}.$$

5. Déterminer la limite de la suite de terme général  $\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}}$ .
6. Soit  $u$  une suite réelle et  $\ell$  un réel.  
Donner la définition, avec quantificateurs, de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .
7. En déduire l'existence d'un rang  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait :

$$\frac{I_{n+1,n+1}}{I_{n,n}} \leq \frac{1}{2}.$$

8. En déduire que pour tout  $n \geq n_0$  on a :  $I_{n,n} \leq \frac{2^{n_0} I_{n_0,n_0}}{2^n}$ .
9. Déterminer la nature de la série de terme général  $I_{n,n}$ .
- 9.a. Déterminer un équivalent de  $\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- 9.b. En déduire la limite de  $\exp\left((2n+1) \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- 9.c. On admet l'équivalent suivant (dit de Stirling) :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

En déduire un équivalent de  $4^n I_{n,n}$ .

- 9.d. Déterminer la nature de la série de terme général  $4^n I_{n,n}$ .