BCPST 1.1 & 1.2

BCPST 1.12

Corrigé du devoir maison n° 11

— —

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. La fonction $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale W_n est bien définie.
2. Le calcul des premières intégrales donne : $\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = 1.}$
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.
   pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$. On multiplie par $(\cos t)^n$ qui est positif (donc le sens des inégalités est inchangé). On obtient $0 \leqslant (\cos t)^{n+1} \leqslant (\cos t)^n$. Donc, par croissance de l'intégrale, et puisque $0 < \frac{\pi}{2}$, on obtient : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$.
   Ainsi, $0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$.
   $\boxed{\text{On en déduit que la suite } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Nous savons déjà que $W_n \geqslant 0$ (d'après la question précédente). De plus, $t \mapsto (\cos t)^n$ est une fonction continue, positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n = 0 \Longrightarrow (\cos t)^n = 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui n'est bien sûr pas le cas.
   On en déduit que $\boxed{W_n > 0}$.

   (c) La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, majorée (par 0) donc $\boxed{\text{cette suite est convergente.}}$
4. (a) Soit n un entier naturel fixé quelconque.
   $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t (1 - \sin^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t dt$. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t dt$ par intégration par parties en posant, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $u(t) = \sin t, v'(t) = \cos^n t \sin t, u'(t) = \cos t, v(t) = -\frac{\cos^{n+1} t}{n+1}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t dt = \left[\sin t \frac{\cos^{n+1} t}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \frac{\cos^{n+1} t}{n+1} = 0 + \frac{1}{n+1} W_{n+2}.$$

   Ainsi, $W_{n+2} = W_n - \frac{1}{n+1} W_{n+2}$, donc $\frac{n+2}{n+1} W_{n+2} = W_n$.
   On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.}$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, multiplions l'égalité précédente par W_{n+1}. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_nW_{n+1}$. Cela veut dire que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Donc tous les termes sont égaux à son premier terme (pour $n = 0$), qui est W_1W_0. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0.}$
5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Nous avons montré que la suite (W_n) est décroissante. Donc $W_n \geqslant W_{n+1}$.
   On a donc aussi $W_{n+1} \geqslant W_{n+2}$, or d'après la question précédente, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$, d'où $W_{n+1} \geqslant \frac{n+1}{n+2} W_n$.
   En regroupant ces deux inégalités, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \frac{n+1}{n+2} W_n.}$

   (b) Nous avons montré que la suite (W_n) est à termes strictement positifs. Donc on peut dviser l'inégalité précédente par $Wn > 0$. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \geqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \geqslant \frac{n+1}{n+2}$. Or $\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$. Ces limites sont égales, donc d'après le théorème d'existence de limite par encadrement (vulgairement appelé "théorème des

gendarmes", ou "théorème du sandwich"), la suite $\left(\frac{W_{n+1}}{W_n}\right)$ converge, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$. On en déduit : $\boxed{W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n.}$.
Puis, par produit des équivalents, $(n+1)W_{n+1}W_n \underset{+\infty}{\sim} nW_n^2$ (puisque $(n+1) \sim n$ et $W_{n+1} \sim W_n$).
Or nous avons montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$. Donc $nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$.
Par quotient des équivalents, on a $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$, puis, par puissance $\frac{1}{2}$, et sachant que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient : $\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto t^2 \ln^n(t)$ est continue sur le segment $[1, \mathbf{e}]$ donc $\underline{I_n \text{ existe}}$.
2. $I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathbf{e}} t^2 \ln(t)\mathrm{d}t$.

   On pose $\begin{cases} u'(t) = t^2 \\ v(t) = \ln(t) \end{cases}$ On a donc $\begin{cases} u(t) = \dfrac{t^3}{3} \\ v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \mathbf{e}]$ donc, par intégration par parties,
   $$I_1 = \left[\frac{t^3 \ln(t)}{3}\right]_1^{\mathbf{e}} - \int_1^{\mathbf{e}} \frac{t^2}{3}\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{e}^3}{3} - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{e}^3}{3} - \left(\frac{\mathbf{e}^3}{9} - \frac{1}{9}\right)$$
   Donc, $\boxed{I_1 = \dfrac{1 + 2\mathbf{e}^3}{9}}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $\forall t \in [1, \mathbf{e}],\ 0 \leq \ln(t) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \ln^{n+1}(t) \leq \ln^n(t) \Rightarrow 0 \leq t^2 \ln^{n+1}(t) \leq t^2 \ln^n(t)$ (On a multiplié par $\ln^n t \geqslant 0$ et par $t^2 \geqslant 0$)
   Par croissance de l'intégrale, $\boxed{0 \leq I_{n+1} \leq I_n}$.
4. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée donc, par le théorème de la limite monotone, $\underline{\text{elle converge}}$.
   $\forall t \in [1, \mathbf{e}],\ 0 \leq \ln^n(t) \leq 1$ donc $0 \leq t^2 \ln^n(t) \leq t^2$
   Par croissance de l'intégrale, $0 \leq I_n \leq \displaystyle\int_1^{\mathbf{e}} t^2\mathrm{d}t$ donc $0 \leq I_n \leq \dfrac{\mathbf{e}^3 - 1}{3}$.
   Puisque la suite (I_n) converge, on en déduit, par passage à la limite, $\boxed{0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} I_n \leq \dfrac{\mathbf{e}^3 - 1}{3}}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On pose $\begin{cases} u'(t) = t^2 \\ v(t) = \ln^{n+1}(t) \end{cases}$ On a donc $\begin{cases} u(t) = \dfrac{t^3}{3} \\ v'(t) = \dfrac{(n+1)\ln^n(t)}{t} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \mathbf{e}]$ donc, par intégration par parties,
   $$I_{n+1} = \left[\frac{t^3 \ln^{n+1}(t)}{3}\right]_1^{\mathbf{e}} - \int_1^{\mathbf{e}} \frac{(n+1)t^2 \ln^n(t)}{3}\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{e}^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n$$
   Donc, $\boxed{I_{n+1} = \dfrac{\mathbf{e}^3}{3} - \dfrac{n+1}{3}I_n}$.
6. Supposons, par l'absurde, que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n \neq 0$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)I_n = \infty$.
   Par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(I_{n+1} + \dfrac{(n+1)I_n}{3}\right) = \infty$.

Or, par la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} + \dfrac{(n+1)I_n}{3} = \dfrac{\mathbf{e}^3}{3}$.

Donc, la suite $\left(I_{n+1} + \dfrac{(n+1)I_n}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Donc, sa limite ne peut pas être infinie.

D'où, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

On a donc $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{3}{n+1}\left(\dfrac{\mathbf{e}^3}{3} - I_{n+1}\right)$ donc $I_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\mathbf{e}^3}{n+1} - o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

Donc, $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{e}^3}{n+1}$.

Finalement, $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{e}^3}{n}}$.