Colle semaine 30.

Sujet 1

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 te^{2t}\,dt$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt.$$

1. Calculer I_0, I_1 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2}$ Pour ce dernier calcul, on pourra faire le changement de variable $x = \tan t$ dans l'intégrale obtenue.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}],\ 0 \leqslant \tan^{n+1}(t) \leqslant \tan^n(t)$.
3. En déduire que la suite (I_n) est décroissante, positive. Qu'en déduit-on ?
4. En utilisant le résultat de la première question, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Sujet 2

Exercice 1. Calculer

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt.$$

On pourra effectuer le changement de variable $u = \cos(t)$.

Exercice 2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

1. Justifier que cette suite est bien définie.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties (où on posera $u'(x) = 1$, $v(x) = (\ln x)^n$ dans I_n), déterminer une relation entre I_n et I_{n-1}.
4. Montrer que $\forall x \in [1, e]\,,\ 0 \leqslant (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$.
5. En déduire que la suite $(I_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée.
6. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
7. On note ℓ sa limite. Donner un encadrement de ℓ.
8. À l'aide de la relation établie à la question **??**, déterminer la valeur de la limite ℓ.
9. Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Sujet 3

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(t)\ dt$ à l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$.

Exercice 2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

On rappelle que

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n existe.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation entre I_n et I_{n-1}. On pourra faire une intégration par parties.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Montrer que $\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant (1-t)^n e^t \leqslant 3(1-t)^n$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\ dt$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{3}{(n+1)!}$.
5. Déduire de la question **??** une expression de I_n à l'aide d'une somme.
6. Calculer I_0 et déduire des questions précédentes un encadrement de e.
7. Donner une valeur approchée (sous forme de somme) de e à 10^{-2} près.
8. Déterminer une fonction python `valeurapprochee(epsilon)` qui renvoie une valeur approchée de e à epsilon près.