Devoir Surveillé n°8

Samedi 30 mai 2026

– Espaces vectoriels et applications linéaires. –

BCPST 1.1 & 1.2

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter. **Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être <u>soulignés</u> ou $\boxed{\textbf{encadrés}}$.** N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Problème.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient $u_1 = (-2, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$.

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A.

Soit $h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (3x + y - z, -x + y + z, x + y + z) \end{cases}$

Partie 1 .

1. **Une autre base de $\mathbb{R}^3$.**
   (a) Montrer que la famille $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathscr{C}$.
   (c) Soit P la matrice de la famille $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
2. **Étude de g.**
   (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $g(x, y, z)$.
   (b) Déterminer une base de $\ker(g)$. On l'exprimera en utilisant un ou plusieurs vecteurs de la famille $\mathscr{C}$.
   (c) Déterminer une base de $\ker(g - \mathrm{Id})$. On l'exprimera en utilisant un ou plusieurs vecteurs de la famille $\mathscr{C}$.
   (d) Calculer $g(u_3)$.
   (e) Déterminer la matrice de g dans la base $\mathscr{C}$. On la notera D.
   (f) L'application g est-elle bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$?
3. **Étude de h.**
   (a) Déterminer la matrice de h dans la base $\mathscr{B}$. On la notera B.
   (b) Déterminer la matrice de h dans la base $\mathscr{C}$. On la notera Δ.
   (c) L'application h est-elle bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$?
4. **Liens entre g et h.**
   (a) Montrer que g et h commutent, c'est-à-dire que $g \circ h = h \circ g$.
   (b) Vérifier que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. **On admettra que** $\mathrm{B} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$.

Partie 2.

Dans cette partie, on cherche à déterminer l'ensemble des applications linéaires f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ tels que

$$h \circ f = f \circ g \ (\star)$$

1. Proposer une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ solution de $(\star)$.
2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et soit M sa matrice dans la base $\mathscr{B}$. On pose $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.
   (a) Montrer que l'équation $(\star)$ est équivalente à une équation matricielle entre les matrices A, B, M. On note $(\star\star)$ cette nouvelle équation, d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathrm{BM} = \mathrm{MA} \Longleftrightarrow \Delta\mathrm{N} = \mathrm{ND}$. *On pourra utiliser des résultats de la partie 1.*
   (c) En utilisant les coefficients des matrices, déterminer les matrices N qui vérifient $\Delta\mathrm{N} = \mathrm{ND}$.
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de $(\star\star)$.
   (e) En déduire l'ensemble des solutions de $(\star)$.
3. Soit f une solution de $(\star)$. Déterminer son rang. f est-elle bijective ?
4. **Étude théorique.**
   Soit f une solution de $(\star)$. Sans exprimer les ensembles, montrer que
   (a) $g(\mathrm{Ker}(f)) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) $h(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$.
   (c) $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$. En déduire que f ne peut pas être bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Partie 3 - Informatique.

1. Écrire une fonction appelée `g` avec en paramètre d'entrée une liste `L` de trois réels représentant un vecteur de $\mathbb{R}^3$, qui renvoie l'image de ce vecteur par l'application linéaire g (définie plus haut), sous forme d'une liste de trois réels.
2. Écrire une fonction `appartient_ker` avec en paramètre d'entrée une liste `L` de trois réels représentant un vecteur de $\mathbb{R}^3$, qui renvoie `True` si ce vecteur appartient à $\mathrm{Ker}(g)$ et `False` sinon.
3. Écrire une fonction `liste_noyau` avec en paramètre d'entrée un nombre entier `n` positif, qui renvoie la liste de tous les vecteurs appartenant à $\mathrm{Ker}(g)$, de coordonnées entières comprises entre `-n` et `n`.
   On rappelle que si a et b sont des entiers relatifs (a et b peuvent être négatifs) tels que a<b,
   dans "`for i in range(a,b)`" la variable `i` prend successivement les valeurs `a,a+1,...,b-1`
   (a inclus et b exclu).