BCPST 1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n° 8

— 30 mai 2026—

Problème.

Partie 1 .

1. **Une autre base de $\mathbb{R}^3$.**

(a) Les vecteurs u_1, u_2, u_3 appartiennent à $\mathbb{R}^3$ donc $\text{vect}(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^3$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ fixé quelconque.
On cherche x, y, $z \in \mathbb{R}$ tels que $xu_1 + yu_2 + zu_3 = (a, b, c)$ (E)

$$
\begin{aligned}
(E) \iff & x(-2,1,-1) + y(1,-1,1) + z(1,0,1) = (a,b,c) \\
\iff & \begin{cases} x - y = b \\ -2x + y + z = a \\ -x + y + z = c \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x - y = b & \\ -y + z = a + 2b & L2 \leftarrow L2 + 2L1 \\ z = b + c & L3 \leftarrow L3 + L1 \end{cases} \qquad \text{système de Cramer} \\
\iff & \begin{cases} x = -a + c \\ y = -a - b + c \\ z = b + c \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc $(a, b, c) \in \text{vect}(\mathcal{C})$.
Donc $\mathbb{R}^3 \subset \text{vect}(\mathcal{C})$.
On déduit des deux inclusions que $\mathbb{R}^3 = \text{vect}(\mathcal{C})$. Donc $\mathcal{C}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
De plus, $\text{Card}\,(\mathcal{C}) = \dim \mathbb{R}^3$ (dimension finie), donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

(b) Nous avons vu dans la question précédente que tout vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ s'écrit : $(a, b, c) = (-a + c)u_1 + (-a - b + c)u_2 + (b + c)u_3$.

Donc $\boxed{\text{les coordonnées de } (a,b,c) \text{ dans la base } \mathcal{C} \text{ sont } \begin{pmatrix} -a+c \\ -a-b+c \\ b+c \end{pmatrix}}$.

(c) P est la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{C}$ donc le rang de P est le rang de $\mathcal{C}$. Or $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\text{rg}(\mathcal{C}) = 3$.
Donc $\text{rg}(P) = 3$. Puisque P est une matrice carrée d'ordre 3, $\boxed{\text{on en déduit que } P \text{ est inversible}}$.
Déterminons son inverse à l'aide d'un système :

Soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ fixé quelconque.

Résolvons le système $PX = B$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
PX = B \iff & \begin{cases} -2x + y + z = a \\ x - y = b \\ -x + y + z = c \end{cases} \qquad \text{on retrouve le système de la question 1a} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{il est de Cramer. On utilise le résultat de la question 1a} \\
\iff & \begin{cases} x = -a + c \\ y = -a - b + c \\ z = b + c \end{cases} \\
\iff & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{On en déduit } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

2. **Étude de g.**

(a) Puisque g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, on en déduit :
$\boxed{\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = (-x-2y, x+y-z, -x-2y)}$.

(b) $\ker(g)$ est l'ensemble des solutions du système (S) : $\begin{cases} -x-2y = 0 \\ x+y-z = 0 \end{cases}$. Or :

$$(S) \iff \begin{cases} -x-2y \quad = 0 \\ \quad -y-z = 0 \quad L2 \leftarrow L2+L1 \end{cases} \quad \text{système échelonné}$$
$$\iff \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}$$

Ainsi, $\ker(g) = \{(2z,-z,z),\ z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((2,-1,1)) = \text{vect}(-(2,-1,1)) = \text{vect}((-2,1,-1)) = \text{vect}(u_1)$.
La famille (u_1) est donc génératrice de $\ker(g)$. Elle est libre car elle est constituée d'un unique vecteur non-nul. $\boxed{\text{Donc la famille } (u_1) \text{ est une base de } \ker(g)}$.

(c) La matrice de l'application $g - \text{Id}$ est $A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
Donc $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (g-Id)(x,y,z) = (-2x-2y, x-z, -x-2y-z)$.
$\ker(g - \text{Id})$ est l'ensemble des solutions du système (S) : $\begin{cases} -2x-2y = 0 \\ x-z = 0 - x - 2y - z = 0 \end{cases}$
En résolvant ce système par l'algorithme du pivot de Gauss, on obtient :

$$S \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

Donc $\ker(g - \text{Id}) = \{(z,-z,z),\ z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1,-1,1)) = \text{vect}(u_2)$.
On montre comme à la question précédente que $\boxed{\text{la famille } (u_2) \text{ est une base de } \ker(g - \text{Id})}$.

(d) $g(u_3) = g(1,0,1) = (-1,0,-1)$. Donc $\boxed{g(u_3) = -u_3}$.

(e) $u_1 \in \ker(g)$ donc $g(u_1) = O_{\mathbb{R}^3}$ (coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{C}$: 1ère colonne de la matrice).

$u_2 \in \ker(g - \text{Id})$ donc $(g - \text{Id})(u_2) = O_{\mathbb{R}^3}$, donc $g(u_2) - u_2 = O_{\mathbb{R}^3}$, donc $g(u_2) = u_2$ (coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{C}$: 2ème colonne de la matrice).

$g(u_3) = -u_3$ (coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{C}$: 3ème colonne de la matrice).

On en déduit la matrice de g dans la base $\mathcal{C}$: $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

(f) La matrice D n'est pas inversible (car elle a une colonne de zéros, elle est de rang au-plus 2 et on peut montrer facilement qu'elle est de rang 2 car la famille de ses vecteurs colonnes est de rang 2). $\boxed{\text{Donc } g \text{ n'est pas bijective}}$.

3. **Étude de h.**

(a) La matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ s'obtient immédiatement à partir de l'expression de l'image par h d'un vecteur (x,y,z) : $\boxed{B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

(b) À l'aide de l'expression de h, on calcule $h(u_1)$, $h(u_2)$ et $h(u_3)$ et on les exprime comme combinaisons linéaires de u_1, u_2, u_3 (les combinaisons linéaires sont très simples et se voient immédiatement). On obtient :
$h(u_1) = 2u_1$, $h(u_2) = u_2$, $h(u_3) = 2u_3$.

On en déduit la matrice de h dans la base $\mathcal{C}$: $\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

(c) La matrice de h dans la base $\mathcal{C}$ est la matrice Δ. Cette matrice est inversible (c'est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous non-nuls). $\boxed{\text{On en déduit que } h \text{ est bijective}}$.

4. **Liens entre g et h.**

(a) On vérifie que $D\Delta = \Delta D$. $\boxed{\text{On en déduit que } g \circ h = h \circ g. \text{ Donc } g \text{ et } h \text{ commutent}}$.

(b) On calcule d'abord PD : $PD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Puis $(PD)P^{-1}$. $\boxed{\text{On vérifie que } PDP^{-1} = A}$.

Partie 2.

1. On constate que $\boxed{\text{l'endomorphisme nul de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifie } (\star)}$.

2. (a) Par bijectivité de la représentation matricielle d'un endomorphisme par rapport à des bases données (ici $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée), $h \circ f = f \circ g \iff \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(h \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f \circ g)$.
Or $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(h \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(h)\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f) = BM$,
et $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(g) = MA$.
Ainsi, $\boxed{h \circ f = f \circ g \iff BM = MA}$.

(b) On se souvient tout d'abord que $A = PDP^{-1}$ et $B = P\Delta P^{-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
BM = MA &\iff P\Delta P^{-1}M = MPDP^{-1} \\
&\iff \Delta P^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} \quad \text{on a multiplié par } P^{-1} \text{ (inversible) à gauche} \\
&\iff \Delta \underbrace{P^{-1}MP}_{N} = \underbrace{P^{-1}MP}_{N} D \quad \text{on a multiplié par } P \text{ (inversible) à droite} \\
&\iff \Delta N = ND
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{BM = MA \iff \Delta N = ND}$.

(c) On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
On calcule les deux produits, on obtient :
$\Delta N = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ et $ND = \begin{pmatrix} 0 & b & -c \\ 0 & e & -f \\ 0 & h & -i \end{pmatrix}$.

Ainsi, $$\begin{aligned}
\Delta N = ND &\iff \begin{cases} 2a = d = 2g = 0 \\ 2b = b \\ 2h = h \\ 2c = -c \\ f = -f \\ 2i = -i \end{cases} \\
&\iff a = b = c = d = f = g = h = i = 0
\end{aligned}$$
Donc les matrices N qui vérifient la relation $\Delta N = ND$ sont les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $e \in \mathbb{R}$.

(d) L'ensemble des solutions de $(\star\star)$ est l'ensemble des matrices M qui s'écrivent $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $e \in \mathbb{R}$. Donc, en posant $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est l'ensemble $\text{vect}(PEP^{-1})$.

Or $PEP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Ainsi, l'ensemble des solutions de } (\star\star) \text{ est } \left\{ e \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ e \in \mathbb{R} \right\}}$.

(e) On en déduit l'ensemble des solutions de $(\star)$.

Posons : $\boxed{\begin{array}{rccl} k: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-x-y+z, x+y-z, -x-y+z) \end{array}}$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (\star) \text{ est l'ensemble } \{\lambda k, \lambda \in \mathbb{R}\}}$.

3. f est une solution de $(\star)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda k$.

$\boxed{\text{Si } \lambda = 0,\ \text{rg}(f) = 0}$ car f est l'endomorphisme nul.

$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 0,\ \text{rg}(f) = \text{rg}(k) = 1}$ (obtenu en échelonnant la matrice de k dans la base canonique).

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et dans tous les cas, $\text{rg}(f) < 3$. $\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ n'est pas bijective}}$.

4. **Étude théorique.**

(a) Soit $v \in g(\ker(f))$ fixé quelconque.
Il existe donc $u \in \ker(f)$ tel que $g(u) = v$.
Calculons $f(v)$ *(on veut montrer que $v \in \ker(f)$)* :
$f(v) = f(g(u)) = \underbrace{f \circ g(u) = h \circ f(u)}_{\text{car } f \circ g = h \circ f} = h(f(u))$.
Or $u \in \ker(f)$ donc $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $h(f(u)) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
Ainsi, $f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $v \in \ker(f)$.
On en déduit que $\boxed{g(\text{Ker}(f)) \subset \text{Ker}(f)}$.

(b) Soit $v \in h(\text{Im}(f))$ fixé quelconque.
(on veut montrer que $v \in \text{Im}(f)$)
Il existe donc $u \in \text{Im}(f)$ tel que $v = h(u)$.
Puis, $u \in \text{Im}(f)$ donc il existe $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = f(w)$.
Ainsi, $v = h(f(w)) = \underbrace{h \circ f(w) = f \circ g(w)}_{\text{car } f \circ g = h \circ f} = f(g(w))$.
On pose $u_0 = g(w)$.
$u_0 \in \mathbb{R}^3$ et $v = f(u_0)$, donc $v \in \text{Im}(f)$.
On en déduit que $\boxed{h(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)}$.

(c) Soit $u \in \ker(g)$ fixé quelconque.
(on veut montrer que $u \in \ker(f)$)
Donc $g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $\underbrace{f(g(u))}_{f \circ g(u)} = 0_{\mathbb{R}^3}$.
Ainsi, puisque $f \circ g = h \circ f$, on a $h \circ f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$, c'est à dire que $h(f(u)) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $f(u) \in \ker(h)$.
Or nous avons montré que h était bijective, donc $\ker(h) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Ainsi, $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
Donc $u \in \ker(f)$.
On en déduit que $\boxed{\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)}$.
Or nous avons vu à la question 2f que g n'est pas bijective. Comme g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, elle n'est pas injective. Donc $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(g)$. On en déduit $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(f)$. Donc f n'est pas injective. $\boxed{\text{Donc } f \text{ n'est pas bijective}}$.

Partie 3 - Informatique.

1.
```
def g(L):
    x = L[0]
    y = L[1]
    z = L[2]
    return [-x-2*y,x+y-z,-x-2*y]
```

2.
```
def appartient_ker(u):
    if g(u)==[0,0,0]:
        return True
    return False
```

On peut aussi écrire la fonction suivante en remarquant que `g(u)==[0,0,0]` est une variable booléenne :

```
def appartient_ker(u):
    return g(u)==[0,0,0]:
```

3.
```
def liste_noyau(n):
    L = []
    for i in range(-n,n+1):
        for j in range(-n,n+1):
            for k in range(-n,n+1):
                if appartient_au_noyau([i,j,k]):
                    L.append([i,j,k])

    return L
```