

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1 On appelle pavé ouvert du plan tout sous-ensemble P de la forme $I \times J$, où I et J sont deux intervalles ouverts de \mathbb{R} (I et J sont de la forme $] -\infty, a[$, $]b, +\infty[$, $]a, b[$, ou \mathbb{R}).

Exemples :

Définition 2 On appelle fonction réelle de 2 variables réelles toute application f définie sur un pavé ouvert P de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f : P &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Exemples :

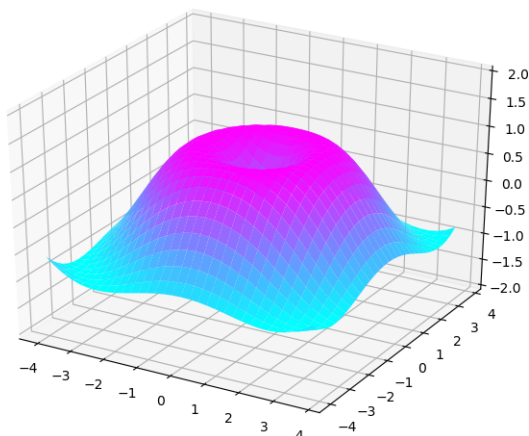
1. $f : (x, y) \mapsto x^2y - \cos y$.
2. $g : (x, y) \mapsto \sqrt{xy}$.

1.2 Représentation graphique d'une fonction de deux variables

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. L'ensemble des points :

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in I \times J\}$$

est appelé **surface représentative de f** .



Surface représentative de $(x, y) \mapsto \sin\sqrt{x^2 + y^2}$ sur $] -4, 4[^2$

1.3 Applications partielles en un point

Définition 3 Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, définie sur le pavé $I \times J$, et soit $M(x_0, y_0)$ un point de $I \times J$.

On appelle applications partielles de f en M_0 les deux fonctions suivantes :

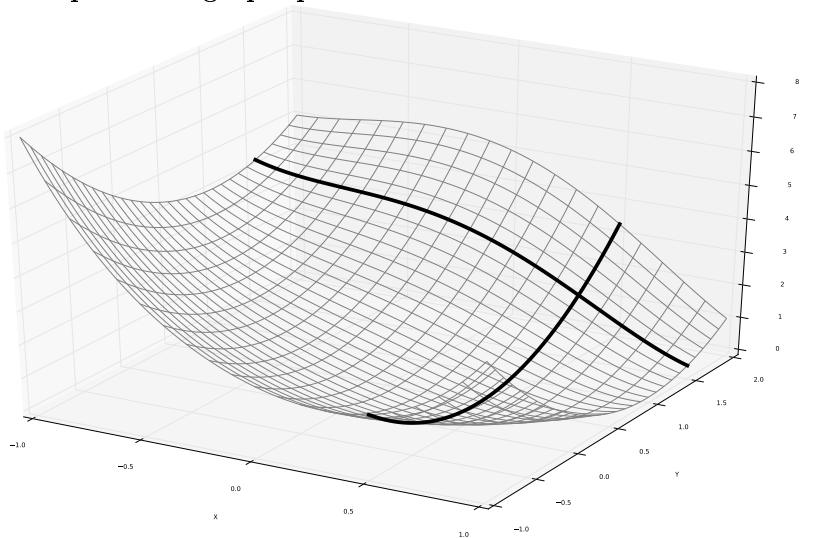
$$\begin{aligned} f_1 : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, y_0) \end{aligned}$$

f_1 , appelée première application partielle en M_0 , est aussi notée $f(\cdot, y_0)$.

$$\begin{aligned} f_2 : J &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto f(x_0, y) \end{aligned}$$

f_2 , appelée deuxième application partielle en M_0 , est aussi notée $f(x_0, \cdot)$.

Interprétation graphique :



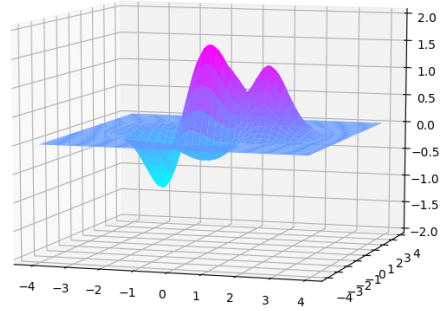
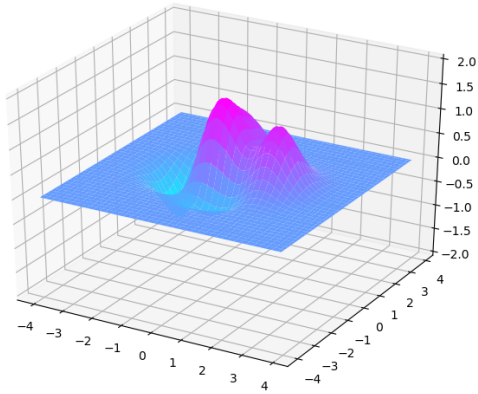
Exemple : Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2y + 2x - 3xy^2 + 1 \end{aligned}$$

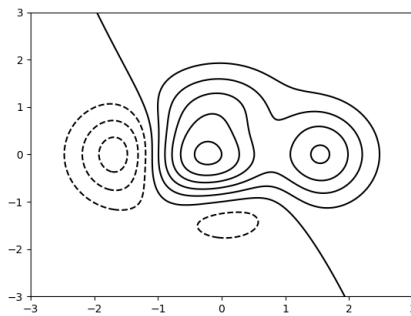
Déterminer les applications partielles de f en $(0, 0)$, puis en $(2, 1)$.

1.4 Lignes de niveau

Définition 4 On appelle ligne de niveau de f pour la valeur $c \in \mathbb{R}$ l'ensemble des antécédents de c par la fonction f . C'est donc l'ensemble : $\{(x, y) \in I \times J \mid f(x, y) = c\}$.



Surface représentative de la fonction $(x, y) \mapsto \frac{3}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + x^2 + y^2\right) \exp(-(x^2 + y^2))$ sur $] -4, 4[^2$ (vue sous deux angles différents).



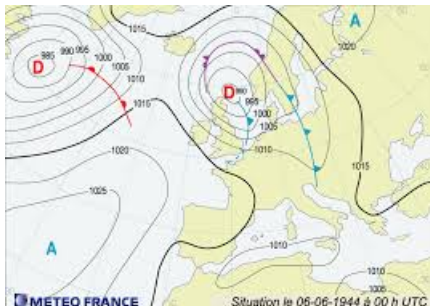
Les lignes de niveau de cette fonction (de 0.3 en 0.3)

Exemples :

1. Les cartes géographiques utilisent les courbes de niveau pour représenter le relief. Ces courbes de niveau sont les lignes de niveau de la fonction...



2. Les isobares utilisées par les météorologues sont des lignes de niveau.



1.5 Continuité

La continuité pour les fonctions de plusieurs variables est une notion difficile à appréhender. Nous ne donnerons pas de définition formelle mais nous limiterons à une représentation intuitive : une fonction de deux variables est continue si sa surface représentative n'a pas de "marche".

Exercice L'assertion suivante est-elle vraie?

f est continue en (x_0, y_0) si, et seulement si, ses deux applications partielles en (x_0, y_0) sont continues.

2 Dérivées partielles

2.1 Dérivées partielles en un point

Définition 5 Soit

$$\begin{aligned} f : I \times J &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

une fonction de deux variables réelles. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $I \times J$, et soient $f_1 = f(., y_0)$ et $f_2 = f(x_0, .)$ les applications partielles de f en M_0 .

Si f_1 est dérivable en x_0 , alors on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en M_0 . On note alors :

$$f'_1(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0).$$

Si f_2 est dérivable en y_0 , alors on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable en M_0 . On note alors :

$$f'_2(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0).$$

Exemple :

Déterminer les dérivées partielles en $(1, \pi)$ de :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + 2xy + \cos(x - y) \end{aligned}$$

2.2 Fonctions dérivées partielles

Définition 6 Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$.

• Si f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en tout point M_0 de $I \times J$, on définit la fonction dérivée partielle de f par rapport à la première variable par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : I \times J &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

• Si f admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable en tout point M_0 de $I \times J$, on définit la fonction dérivée partielle de f par rapport à la deuxième variable par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} : I \times J &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Exemple : Déterminer les fonctions dérivées partielles de la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2y + \sin(x - y) \end{aligned}$$

2.3 Fonctions de classe C^1

2.4 Définition

Définition 7 Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables.

On dit que f est de classe C^1 sur $I \times J$ si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues.

Remarque :

La définition de continuité d'une fonction de deux variables n'étant pas au programme, pour prouver qu'une fonction de deux variables est de classe C^1 , on utilisera le résultat suivant :

Proposition 1 1. Les polynômes et les quotients de polynômes de plusieurs variables sont de classe C^1 sur leur ensemble de définition.

2. Si f est de classe C^1 sur un pavé ouvert $P \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $K \subset \mathbb{R}$, et si g est de classe C^1 sur K (à valeurs réelles), alors la composée $g \circ f$ est de classe C^1 sur \mathcal{D} .

3. Les combinaisons linéaires, et produits de fonctions de classe C^1 sont de classe C^1 .

Exemple : Soit $f : (x, y, z) \mapsto xy^2 + 3 + 5x \sin(x^3 + 2xy)$. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

2.5 Petite variation de f au voisinage d'un point

Rappel : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 , alors f possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 qui est :

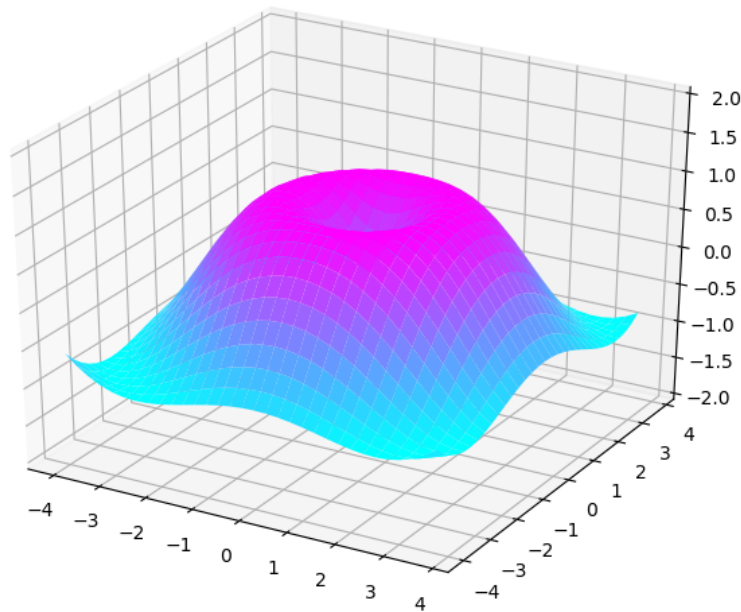
$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \text{ ou encore : } f(x_0 + h) \underset{0}{=} f(x_0) + f'(x_0)h + o(h).$$

Si on écrit " $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$ ", cela revient à assimiler le graphe de f à sa tangente en x_0 (tangente qui a pour équation

Par analogie, si $f; \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 , une équation du plan tangent en (x_0, y_0) est :

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ce plan est dirigé par les vecteurs $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$ et $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$, et passant par $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Surface représentative de $(x, y) \mapsto \sin\sqrt{x^2 + y^2}$ sur $] -4, 4[^2$

Ainsi, si h et k sont petits, on écrit :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \simeq f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Cela revient à assimiler la surface représentative de f à son plan tangent en (x_0, y_0) .

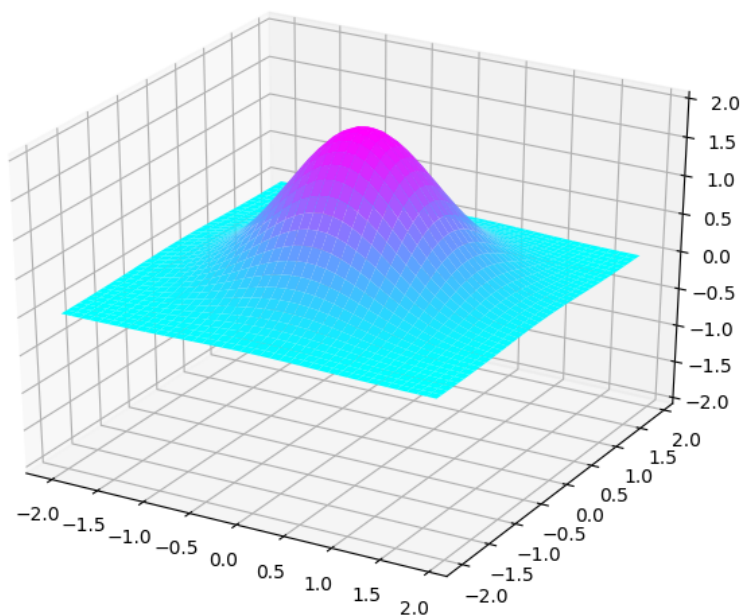
Application : Soient $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 et soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On peut composer ces fonctions en définissant la fonction g suivante :

$$\begin{aligned} g : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

2.6 Dérivées partielles et extrema

Proposition 2 Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $I \times J$. Si M_0 est un extremum de f , alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$



Surface représentative de $(x, y) \mapsto 2 \exp(-(x^2 + y^2))$

Remarques :

1. On a un résultat analogue pour les fonctions d'une variable, dérivable sur un intervalle ouvert :
2. Ce résultat vient du fait que si $M_0(x_0, y_0)$ est un extremum de f , alors x_0 est un extremum de $f(\cdot, y_0)$ (donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$), et y_0 est un extremum de $f(x_0, \cdot)$ (donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$).
3. Ce résultat donne une condition nécessaire mais **non suffisante** à l'existence d'un extremum en un point de l'ouvert $I \times J$, où la fonction est C^1 .

Il ne suffit donc pas de prouver l'annulation simultanée des dérivées partielles pour trouver un extremum! Cependant, on recherchera un extremum parmi les points où les dérivées partielles s'annulent simultanément.

Exemple :

Déterminer les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^2y - xy^2$.

Application : Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

Dans le plan, on considère un nuage de points $M_i(x_i, y_i)$, avec $1 \leq i \leq n$. On cherche la droite D qui approche de "manière optimale" ce nuage.

Il nous faut définir ce que veut dire "de manière optimale" : nous cherchons à minimiser la somme des carrés des écarts des points à la droite (différence des ordonnées).

2.7 Gradient

Définition 8 Soit f une fonction de classe C^1 sur un pavé ouvert $I \times J$. En tout point $(x, y) \in I \times J$, on associe à f un vecteur de \mathbb{R}^2 , appelé gradient de f en (x, y) et noté $\vec{\nabla}f(x, y)$, défini par :

$$\vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Remarques :

1. La direction du vecteur gradient donne la courbe de plus grande pente au point étudié.
2. La norme du vecteur gradient donne la valeur de cette pente.
3. Le gradient est orthogonal à la ligne de niveau correspondante.

Exemple : calculer le gradient en tout point de $f : (x, y) \mapsto (1 - x)^2 + (y - x^2)^2$.

3 Dérivées partielles d'ordre 2

Les fonctions dérivées partielles sont des fonctions de deux variables. On peut donc encore étudier leur dérivabilité. Dans le cas où elles sont dérivables, on peut calculer quatre dérivées partielles d'ordre 2 pour la fonction f :

Exemple : Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $f : (x, y) \mapsto 2xy^3 + y \sin(x - y)$. Que remarque-t-on ?

Théorème de Schwarz. Si les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f sont continues, alors
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$