Fonctions de deux variables.

Exercice 1. On admet que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur leur ensemble de définition (à préciser). Déterminer leurs dérivées partielles :

1. $f : (x, y) \mapsto 3x^2x + 2x\sin(x - 2y)$
2. $g : (x, y) \mapsto \dfrac{2x^3}{x+y} + 3y$
3. $h : (x, y) \mapsto y\ln(2 - x)$

Exercice 2. Déterminer les extrema de :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 \end{array}$$

Exercice 3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.

1. Déterminer les dérivées partielles de f.
2. Montrer que f ne peut admettre un extremum qu'en un seul point.
3. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2)$. f admet-elle un extremum ?

Exercice 4. Déterminer les lignes de niveau (et les tracer) de :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x + 2y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + y \end{cases}$$

Exercice 6. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xf(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ye^{x^2-y^2} \end{cases}$$