INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 25 - SUJET A - LUNDI 8 JUIN 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes. On ne justifiera pas leur existence.

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{2+\cos(t)}\, dt$ à l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$.
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t)\, dt$ à l'aide d'un changement de variable.

(1) (a) On pose $x = \cos t$. La fonction $t \mapsto \cos(t)$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$

(b) $dx = -\sin(t)\, dt$

(c) bornes :

	t	$x = \cos(t)$
bas	0	1
haut	π	-1

(d) D'où : $I = \displaystyle\int_1^{-1} \frac{-dx}{2+x} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{2+x} = \Big[\ln|2+x|\Big]_{-1}^{1} = \ln 3$

(2) $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)\cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t))^2 \cos(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))^2\cos(t)\,dt$

(a) On pose $x = \sin(t)$ - La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

(b) $dt = \cos(x)\,dx$

(c) bornes :

t	$x = \sin(t)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1

(d) d'où $J = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^2\,dx = \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4\,dx = \Big[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

Donc $J = \frac{8}{15}$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}\, dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que l'intégrale I_n est bien définie.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
4. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
5. Montrer que la suite (I_n) converge et que sa limite, notée ℓ, appartient à $\mathbb{R}_+$.
6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$.
7. En déduire que $\ell = 0$ (on pourra faire un raisonnement par l'absurde).
8. Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

1. 2. 3. 4. 5 : voir sujet B

(6) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Calculons I_{n+1} par IPP en posant :

$$\begin{cases} u'(t) = e^{-t} & u(t) = -e^{-t} \\ v(t) = t^{n+1} & v'(t) = (n+1)t^n \end{cases}$$

$u, v \in \mathcal{C}^1([0,1])$

Ainsi, $$I_{n+1} = \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 t^n e^{-t}dt$$
$$= -e^{-1} + (n+1)I_n$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$

(7) voir S.B

(8) d'après (6), $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n = \frac{1}{e} + I_{n+1}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)I_n = \frac{1}{e}$

On en déduit $(n+1)I_n \sim \frac{1}{e}$ car $\frac{1}{e} \neq 0$

D'où $$I_n \sim \frac{1}{e(n+1)}$$

Or $n+1 \sim n$ donc par quotient des équivalents, $\frac{1}{e(n+1)} \sim \frac{1}{en}$

Ainsi, $I_n \sim \frac{1}{en}$

(8) (sujet B) d'après (6), $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $pJ_{p-1} = J_p + \frac{1}{e}$

Or $\lim\limits_{p\to+\infty} J_p = 0$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} pJ_{p-1} = \frac{1}{e}$

On en déduit $pJ_{p-1} \sim \frac{1}{e}$ (car $\frac{1}{e} \neq 0$)

d'où $J_{p-1} \sim \frac{1}{ep}$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 25 - SUJET B - LUNDI 8 JUIN 2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes. On ne justifiera pas leur existence.

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(t)}{3-\sin(t)}\, dt$ à l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$.
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(t)\, dt$ à l'aide d'un changement de variable.

1 a On pose $x = \sin(t)$. La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$

b $dx = \cos(t)dt$

c bornes :

t	$x = \sin(t)$
0	0
π	0

d $I = \displaystyle\int_0^0 \frac{dx}{3-x} = \Big[-\ln|3-x|\Big]_0^0 = 0$

2 $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(t))^2 \sin(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))^2 \sin(t)dt$

a On pose $x = \cos(t)$. La fonction $t \mapsto \cos(t)$ est de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

b $dx = -\sin(t)dt$

c bornes :

	t	$x = \cos(t)$
bas	0	1
haut	$\frac{\pi}{2}$	0

d D'où $J = \displaystyle\int_1^0 -(1-x^2)^2 dx = \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 1-2x^2+x^4\, dx$

$= \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

Ainsi, $J = \frac{8}{15}$

Exercice 2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit $J_p = \int_0^1 t^p e^{-t}\, dt$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que l'intégrale J_p est bien définie.
2. Calculer J_0 et J_1.
3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $J_p \geqslant 0$.
4. Montrer que la suite (J_p) est décroissante.
5. Montrer que la suite (J_p) converge et que sa limite, notée ℓ, appartient à $\mathbb{R}_+$.
6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_p = pJ_{p-1} - \frac{1}{e}$.
7. En déduire que $\ell = 0$ (on pourra faire un raisonnement par l'absurde).
8. Déterminer un équivalent de J_p quand p tend vers $+\infty$.

(1) $t \mapsto t^p e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$ donc cette intégrale existe

(2) $J_0 = \int_0^1 e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$

$J_1 = \int_0^1 t e^{-t} dt$ on effectue une IPP en posant : $\begin{cases} u'(t) = e^{-t} & u(t) = -e^{-t} \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{cases}$ $u, v \in \mathcal{C}^1([0,1])$

d'où $J_1 = \left[-te^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt = -e^{-1} + \left[-e^{-t}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$

donc $J_1 = 1 - \frac{2}{e}$

(3) $\begin{cases} \forall t \in [0,1], \ t^p e^{-t} \geqslant 0 \\ 0 \leqslant 1 \end{cases}$ donc par positivité de l'intégrale, $\underbrace{\int_0^1 t^p e^{-t} dt}_{J_p} \geqslant 0$

(4) Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$\forall t \in [0,1]$, $t^{p+1} e^{-t} - t^p e^{-t} = \underbrace{t^p e^{-t}}_{\geqslant 0} \underbrace{(t-1)}_{\leqslant 0} \leqslant 0$

donc $\int_0^1 t^{p+1} e^{-t} - t^p e^{-t} dt \leqslant 0$ par positivité de l'intégrale $(0 \leqslant 1)$ bornes

donc $\int_0^1 t^{p+1} e^{-t} dt - \int_0^1 t^p e^{-t} dt \leqslant 0$, donc $J_{p+1} \leqslant J_p$

Ainsi, la suite (J_p) est décroissante.

(5) (J_p) est décroissante, minorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente. On note l sa limite.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} 0 \leqslant J_p \\ \lim\limits_{p \to +\infty} J_p = l \end{cases}$ donc par passage à la limite dans l'inégalité, $l \geqslant 0$

donc $l \in \mathbb{R}_+$

(6) Calculons J_p par IPP en posant : $\begin{cases} u'(t) = e^{-t} & u(t) = -e^{-t} \\ v(t) = t^p & v'(t) = p t^{p-1} \end{cases}$ $u, v \in \mathcal{C}^1([0,1])$

d'où $J_p = \left[-t^p e^{-t}\right]_0^1 + p \int_0^1 t^{p-1} e^{-t} dt$
$= -e^{-1} + p J_{p-1}$

donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $J_p = p J_{p-1} - \frac{1}{e}$

(7) On suppose que $l > 0$. Par produit des limites, on obtient $\lim\limits_{p \to +\infty} p J_{p-1} = +\infty$ et par somme des limites, $\lim\limits_{p \to +\infty} J_p = +\infty$ ↯ contradiction car (J_p) converge.

On en déduit $l \leqslant 0$. Or nous avons montré que $l \in \mathbb{R}_+$. D'où $l = 0$

(8) voir S. A