

SOMMES ET PRODUITS.

Exercice 1. Écrire les sommes suivantes en extension, puis calculer :

$$\sum_{k=2}^5 k, \quad \sum_{k=1}^4 (k+1), \quad \sum_{k=0}^3 2k, \quad \sum_{0 \leq 3k \leq 12} 3k, \quad \sum_{k=0}^2 k(2-k), \quad \sum_{k=2}^2 k, \quad \sum_{k=0}^3 2^k, \quad \sum_{k=0}^3 2^{3-k}, \quad \sum_{k=0}^5 1$$

Exercice 2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle donnée, et n est un entier naturel fixé. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$ (il y a plusieurs écritures possibles!) :

1. $5 + 6 + 7 + 8$,
2. $6 + 8 + 10$,
3. $a_6 + a_8 + a_{10}$,
4. $3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 3a_4$,
5. $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$,
6. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$,
7. $1 + 2 + 3 + \dots + (2n - 1) + 2n$,
8. $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0$.
9. $(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \dots + (a_n + n)$
10. $(a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \dots + (a_n + 1)$,
11. $a_{10} + a_{20} + a_{30} + a_{40} + a_{50}$
12. $na_0 + (n - 1)a_1 + (n - 2)a_2 + \dots + 2a_{n-2} + 1a_{n-1} + 0 \times a_n$.

Exercice 3. Écrire les produits suivants en extension et les calculer :

$$\prod_{k=1}^3 k, \quad \prod_{k=0}^{123} k, \quad \prod_{k=6}^{30} (k - 17), \quad \prod_{k=3}^5 (k - 2), \quad \prod_{k=1}^2 2k, \quad \prod_{k=1}^{10} \frac{k}{k+1}.$$

Exercice 4. Écrire à l'aide de factorielles :

$$\prod_{i=1}^n (2i), \quad \prod_{i=3}^n (i^2), \quad \prod_{i=1}^n (n + 5 - i), \quad \prod_{i=1}^n (2i - 1), \quad \prod_{k=1}^n (3k + 1)(3k - 1).$$

Exercice 5. Calculer :

$$\prod_{k=0}^n 2^k, \quad \prod_{k=0}^n e^{n^2}, \quad \prod_{k=0}^n \exp(2k + \sqrt{3}), \quad \prod_{k=0}^n \exp\left(\binom{n}{k} (-1)^k\right), \quad \prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k}, \quad \prod_{k=0}^n (e^{k+3})^3.$$

Exercice 6. Sommes télescopiques. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^n (e^{-\frac{3}{k}})^{\frac{1}{k+1}}.$$

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

2. En déduire l'expression simplifiée

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

préciser la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. En déduire la monotonie et la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

2. On pose

$$S = \sum_{0 \leq 2l \leq n} \binom{n}{2l} \quad \text{et} \quad T = \sum_{0 \leq 2l+1 \leq n} \binom{n}{2l+1}.$$

Déterminer $S + T$ et $S - T$.

3. En déduire S et T .

Exercice 8. Calculer :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2^k}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{2k}, \quad \sum_{k=0}^n \sin^2 k\theta.$$

Exercice 9. Calculer :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j), \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \min(i, j). \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2^{i+j}, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n ij, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}. \end{aligned}$$

Éléments de correction :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^n \exp(2k + \sqrt{3}) &= \prod_{k=0}^n \left(\exp(2k) \underbrace{\exp(\sqrt{3})}_{\text{constante}} \right) \\&= [\exp(\sqrt{3})]^{n+1} \prod_{k=0}^n \exp(2k) \\&= [\exp(\sqrt{3})]^{n+1} \exp \left[\sum_{k=0}^n 2k \right] \\&= [\exp(\sqrt{3})]^{n+1} \exp \left[2 \sum_{k=0}^n k \right] \\&= [\exp(\sqrt{3})]^{n+1} \exp \left[2 \frac{n(n+1)}{2} \right] \\&= \exp[(n+1)\sqrt{3}] \exp[n(n+1)] \\&= \exp[(n+1)\sqrt{3} + n(n+1)] \\&= \exp[(n+1)(\sqrt{3} + n)]\end{aligned}$$