

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 4. SUJET A.

Vendredi 2 octobre 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Somme

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Simplifier : $\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{3^{2k-1}}$. On fera attention aux bornes de la somme.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{3^{2k-1}} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{3^{-1}} \left(-\frac{1}{3^2}\right)^k = 3 \sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{9}\right)^k \\
 &= 3 \times \left(-\frac{1}{9}\right)^2 \frac{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)} \leftarrow 1 + \frac{1}{9} (= \frac{10}{9}) \\
 &= 3 \times \frac{1}{9} \frac{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}}{10}
 \end{aligned}$$

somme des termes d'une suite géométrique de raison $-\frac{1}{9} \neq 1$

d'après :

$$\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{3^{2k-1}} = \frac{1}{30} \left(1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)$$

Exercice 2 - Produit

Soit n un entier naturel non-nul. Écrire à l'aide de factorielles : $\prod_{k=0}^n (2n - k)$.

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=0}^n (2n - k) &= (2n)(2n-1) \dots (n+1)n \\
 &= \frac{(2n)(2n-1) \dots n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1}{(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1}
 \end{aligned}$$

d'après :

$$\prod_{k=0}^n (2n - k) = \frac{(2n)!}{(n-1)!}$$

Exercice 3 - Équation

Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $|x+2| < |2x-1|$.

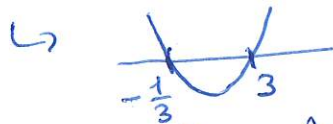
$$|x+2| < |2x-1| \Leftrightarrow (x+2)^2 < (2x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < (2x-1)^2 - (x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < (2x-1+x+2)(2x-1-x-2)$$

$$\Leftrightarrow 0 < \underbrace{(3x+1)(x-3)}$$

trinôme de coefficient dominant $3 > 0$
de racines $-\frac{1}{3}$ et 3



on connaît parfaitement son signe.

L'ensemble des solutions est $]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]3, +\infty[$

Bonus : Soient n et p deux entiers naturels non-nuls. Écrire $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{p}{k}\right)$ à l'aide d'un ou plusieurs coefficients binomiaux.

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{p}{k}\right) &= \prod_{k=1}^n \frac{k+p}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+p)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{(p+1)(p+2) \dots (p+n)}{n!} \\ &= \frac{1 \times 2 \times \dots \times p \times (p+1) \times \dots \times (p+n)}{1 \times 2 \times \dots \times p \times n!} = \frac{(p+n)!}{p! n!} \end{aligned}$$

Ainsi, $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{p}{k}\right) = \binom{p+n}{p} = \binom{p+n}{n}$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 4. SUJET B.

Vendredi 2 octobre 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Somme

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Simplifier : $\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{2^{3k-1}}$. On fera attention aux bornes de la somme.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{2^{3k-1}} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{-1}} \left(\frac{-1}{2^3} \right)^k = 2 \sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{8} \right)^k \\ &\quad \text{somme de } n-1 \text{ termes consécutifs} \\ &\quad \text{d'une suite géométrique de} \\ &\quad \text{raison } -\frac{1}{8} \neq 1 \\ &= 2 \times \left(-\frac{1}{8} \right)^2 \frac{1 - \left(-\frac{1}{8} \right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{8} \right)} \leftarrow \text{dénominateur : } 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \\ &= 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{\left(1 - \left(-\frac{1}{8} \right)^{n-1} \right)}{9} \end{aligned}$$

$$d'w \quad \boxed{\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{2^{3k-1}} = \frac{1}{36} \left(1 - \left(-\frac{1}{8} \right)^{n-1} \right)}$$

Exercice 2 - Produit

Soit n un entier naturel non-nul. Écrire à l'aide de factorielles : $\prod_{j=0}^n (n+j)$.

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^n (n+j) &= n(n+1) \dots (2n-1)(2n) \\ &= \frac{1 \times 2 \times \dots (n-1) \times n(n+1) \dots (2n)}{1 \times 2 \times \dots \times (n-1)} \end{aligned}$$

$$d'w \quad \boxed{\prod_{j=0}^n (j+n) = \frac{(2n)!}{(n-1)!}}$$

Exercice 3 - Équation

Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $|x-2| < |2x+1|$.

$$|x-2| < |2x+1| \Leftrightarrow (x-2)^2 < (2x+1)^2$$

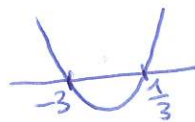
$$\Leftrightarrow 0 < (2x+1)^2 - (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < (2x+1+x-2)(2x+1-x+2)$$

$$\Leftrightarrow 0 < \underbrace{(3x-1)(x+3)}$$

trinôme de coefficient dominant $3 > 0$
de racines $\frac{1}{3}$ et -3

↳ on connaît parfaitement son signe :



L'ensemble des solutions est :

$$]-\infty, -3[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$$

Bonus : Soient n et p deux entiers naturels non-nuls. Écrire $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{p}{k}\right)$ à l'aide d'un ou plusieurs coefficients binomiaux.

voir Sujet A.