

Exercice 5 (TD sommes et produits)

$$\prod_{k=0}^n \exp\left(\binom{n}{k}(-1)^k\right) = \exp\left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k\right]$$

↓ formule du binôme

$$= \exp\left[\underbrace{(1+(-1))^n}_0\right] = 1$$

on utilise : $e^a \times e^b = e^{a+b}$
 ↳ généralisation :
 $\prod_{k=1}^n e^{a_k} = e^{\sum_{k=1}^n a_k}$

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k} \quad \text{On utilise : } \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=1}^n b_k}$$

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+2)}{\prod_{k=1}^n k}$$

Au numérateur, on effectue un changement d'indice :

on pose $j = k+2$

bornes :

k	$j = k+2$
1	3
n	$n+2$

donc $\prod_{k=1}^n (k+2) = \prod_{j=3}^{n+2} j$

Aussi $\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k} = \frac{\prod_{j=3}^{n+2} j}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{\left(\prod_{j=3}^{n+2} j\right) \times (n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times \left(\prod_{k=3}^n k\right)}$

← même chose

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n (e^{k+3})^3 &= \prod_{k=0}^n e^{3k+9} = \exp\left[\sum_{k=0}^n (3k+9)\right] = \exp\left[3\left(\sum_{k=0}^n k\right) + 9(n+1)\right] \\ &= \exp\left[3 \frac{n(n+1)}{2} + 9(n+1)\right] \\ &= \exp\left[3(n+1)\left(\frac{n}{2} + 3\right)\right] \end{aligned}$$