

Applications.

1 Définitions.

1.1 Vocabulaire des applications

Définition 1 Soient E et F deux ensembles. On appelle **application de E dans F** tout procédé qui à chaque élément de E associe un unique élément de F .

- Si f est une application de E dans F , on note

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- On dit que f est **définie sur E , à valeurs dans F** .

Exemple 1 : les fonctions usuelles

Exemple 2 : Fonction indicatrice d'un ensemble

Définition 2 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Si f associe à l'élément x de E , l'élément y de F , on note " $f(x) = y$ ". On dit que y est **l'image** de x par f , et que x est **un antécédent** de y par f .

Exemple : Soit $f : x \mapsto x^2$.

Définition 3 Soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F . On appelle **graphe de f** l'ensemble :

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$$

C'est un sous-ensemble de $E \times F$.

Remarques :

1. Cet ensemble s'écrit aussi :
2. Si E et F sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on peut représenter le graphe d'une application dans le plan :

1.2 Restrictions et prolongements

Définition 4 Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- Soit $A \subset E$. On appelle *restriction de f à A* , et on note $f|_A$, l'application de A dans F définie par :

$$\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$$

- Soit E' un ensemble tel que $E \subset E'$. On appelle *prolongement de f à E'* toute application $\tilde{f}$ de E' dans F telle que $\tilde{f}|_E = f$.

Exemples :

1. Soit la fonction cosinus :

2. $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est

1.3 Composition des applications

Définition 5 Soient E, F, G trois ensembles et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. On appelle **composée de f par g** , notée $g \circ f$, l'application de E dans G définie par :

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple :

Soient $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{1+x^4}$. Peut-on composer f et g ? Ecrire la ou les composées.

Proposition 1 Soient E, F, G, H quatre ensembles. Pour toutes applications $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$, $h : G \rightarrow H$, on a : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

1.4 Image directe d'un ensemble par une application

Définition 6 Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F . Soit $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f , et on note $f(A)$, le sous-ensemble de F constitué des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F | \exists x \in A : y = f(x)\}.$$

Remarque : Si f est une fonction continue définie sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, on lit $f(A)$ sur le tableau de variation de f .

Exemple :

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Déterminer $f([0, 2])$, $f(]-1, 2])$, $f([-3, 1])$, $f(]3, +\infty[)$, $f(]-5, +\infty[)$, $f(\mathbb{R})$, $f(\emptyset)$.

Proposition 2 Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F . Soient A et B deux parties de E .
Si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$

démonstration :

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F . Soient A et B deux parties de E .

Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ mais qu'il n'y a pas égalité en général.

2 Applications injectives, surjectives, bijectives

2.1 Application injective

Définition 7 Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F .
On dit que f est **injective** (ou que f est une **injection**) si :

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ce qui s'exprime aussi de la manière suivante :

Remarques :

1. En d'autres termes, f est injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au-plus un antécédent par f (1 ou 0 antécédent).
2. **Méthode pour prouver que $f : E \rightarrow F$ est (/n'est pas) injective :**
Soit $y_0 \in F$ fixé quelconque. Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in E$:

$$(E) : f(x) = y_0$$

$$(E) \iff \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array}$$

Si l'équation possède 0 ou 1 solution, on conclut que f est injective.

S'il existe au-moins une valeur de y_0 pour laquelle l'équation a au-moins 2 solutions, on conclut que f n'est pas injective.

3. **Autre méthode :** on applique la définition.

Soient $(x, x') \in E^2$ fixés quelconques.

On suppose que $f(x) = f(x')$.

Alors,...

$\vdots$

donc $x = x'$.

4. Négation :

Méthode pour montrer que f n'est pas injective :

5. **Interprétation graphique pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:** Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. f est injective si, et seulement si, toute droite horizontale coupe le graphe de f en au-plus un point (0 ou 1 point d'intersection)

Exemples :

1. la fonction cosinus

2. **Fonction affine :** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{lcl} g : & \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ & n & \mapsto 2n \end{array}$$

$$4. \quad \begin{array}{lcl} h : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^2 \end{array}$$

5. Soit I une partie de $\mathbb{R}$ (par exemple I peut être un intervalle) et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est strictement croissante sur I , alors f est injective.

Proposition 3 Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$, et $g : F \rightarrow G$.
Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

démonstration :

On doit montrer : « $\underbrace{\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont injectives}}_P, \underbrace{\text{alors } g \circ f \text{ est injective}}_Q \rangle$ ».

On commence la démonstration par « On suppose que $\underbrace{f \text{ et } g \text{ sont injectives}}_P \rangle$ et on montre que $g \circ f$ est injective.

On suppose que f et g sont injectives.

Montrons que $g \circ f : E \rightarrow G$ est injective

(c'est à dire, montrons que $\forall (x, x') \in E^2, g \circ f(x) = g \circ f(x') \implies x = x'$.)

Soient $(x, x') \in E^2$ fixés quelconques tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.

Donc $g(\underbrace{f(x)}_y) = g(\underbrace{f(x')}_{y'})$. (on a une égalité de la forme $g(y) = g(y')$)

Or g est injective. On en déduit $\underbrace{f(x) = f(x')}_{y=y'}$.

Or f est injective. On en déduit $x = x'$.

Conclusion : on a montré que $\forall (x, x') \in E^2, g \circ f(x) = g \circ f(x') \implies x = x'$.

On en déduit que $g \circ f$ est injective.

2.2 Application surjective

Définition 8 Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F .
On dit que f est **surjective** (ou que f est une **surjection**) si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

Remarques :

1. En d'autres termes, f est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée a **au-moins** un antécédent par f (1 antécédent ou plus).
2. **Méthode pour prouver que $f : E \rightarrow F$ est(/n'est pas) surjective :**
Soit $y_0 \in F$ fixé quelconque. Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in E$:

$$(E) : f(x) = y_0$$

$$(E) \iff \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array}$$

Si l'équation possède au-moins une solution, on conclut que f est surjective.

S'il existe au-moins une valeur de y_0 pour laquelle l'équation n'a pas de solution, on conclut que f n'est pas surjective.

3. Négation :

4. **Interprétation graphique pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:** Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. f est surjective si, et seulement si, toute droite horizontale coupe le graphe de f en **au-moins** un point.

Exemples :

1. la fonction cosinus

2. **Fonction affine :** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{ccc} g : & \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ & n & \mapsto 2n \end{array}$$

$$4. \quad \begin{array}{ccc} h : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto x^2 \end{array}$$

5. Soit I une partie de $\mathbb{R}$ (par exemple I peut être un intervalle) et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
Comment modifier l'ensemble de départ et/ou d'arrivée pour obtenir une application surjective?

Proposition 4 Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$, et $g : F \rightarrow G$.
Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

démonstration :

2.3 Application bijective

Définition 9 Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F .
On dit que f est **bijective** (ou que f est une **bijection**) si f est à la fois injective et surjective, c'est à dire si :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E : y = f(x)$$

Remarques :

1. En d'autres termes, f est bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet **exactement un antécédent** par f .
2. **Méthode pour prouver que $f : E \rightarrow F$ est(/n'est pas) bijective :**
Soit $y_0 \in F$ fixé quelconque. Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in E$:

$$(E) : f(x) = y_0$$

$$(E) \iff \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array}$$

Si l'équation possède une unique solution, on conclut que f est injective.

S'il existe au-moins une valeur de y_0 pour laquelle l'équation a plusieurs solutions, ou aucune solution, on conclut que f n'est pas bijective. (En fait, dans ce cas, on prouve que f n'est pas surjective ou qu'elle n'est pas injective).

3. **Autre méthode pour une fonction de I dans $\mathbb{R}$:** appliquer le **théorème de la bijection**.

Proposition 5 Soit I un intervalle non-vide et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue, strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I sur son image $f(I)$.

4. Négation :

Méthode pour montrer que f n'est pas bijective :**Exemples :**

1. la fonction identité :

2. **Fonction affine :** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto ax + b \end{array}$$

$$3. \quad \begin{array}{lcl} g : \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$$

$$4. \quad \begin{array}{lcl} h : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$5. \quad \begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x+1}{x-1} \end{array}$$

Proposition 6 Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$, et $g : F \rightarrow G$. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

démonstration :

2.4 Application réciproque d'une bijection

Définition 10 Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective de E dans F . L'application qui à tout élément de F associe son unique antécédent par f s'appelle l'application réciproque de f et se note f^{-1} . Elle est caractérisée par :

$$\forall (x, y) \in E \times F, f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

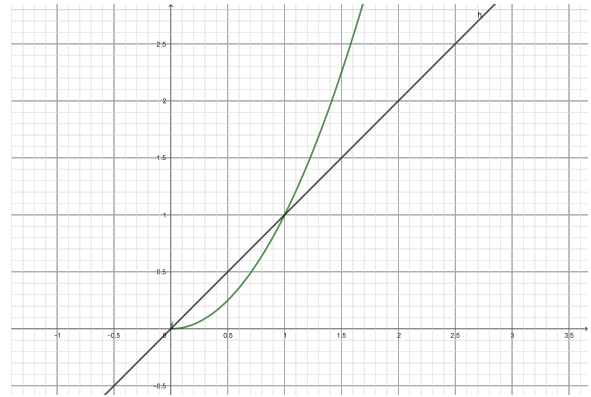
Remarques :

1. On obtient l'application réciproque en résolvant l'équation $f(x) = y_0$. En effet, en prouvant que l'application f est bijective, on obtient l'expression, en fonction de y_0 , de l'unique antécédent de y_0 par f . La fonction qui à tout y_0 de F associe son unique antécédent par f est bien l'application réciproque.

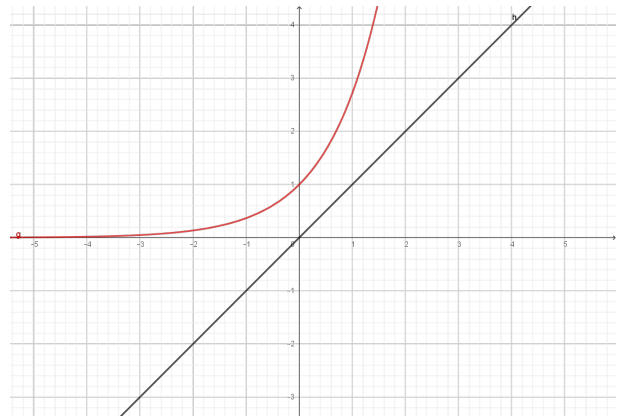
2. **Interprétation graphique :** Soient I et J deux intervalles. Si $f : I \rightarrow J$ est bijective, alors le graphe de f et celui de f^{-1} sont

Exemples :

1. $x \mapsto x^2$



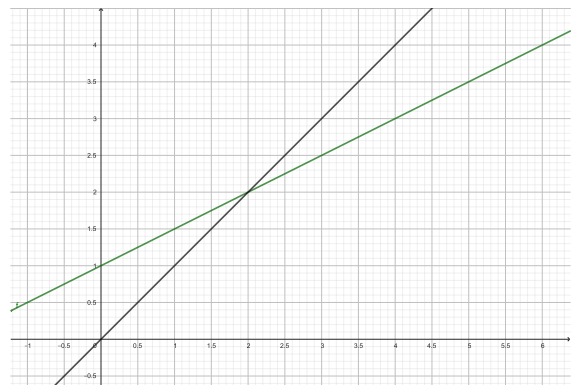
2. Fonction exponentielle :



3. **Fonction affine :** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b$$



$$4. \quad \begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} \setminus \{1\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x+1}{x-1} \end{array}$$



Proposition 7 (Composée de f et f^{-1}) Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective. Alors : $f^{-1} \circ f = Id_E$,
 $f \circ f^{-1} = Id_F$

démonstration :

Proposition 8 Soient E, F et G trois ensembles et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.
Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Proposition 9 Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective. Alors l'application réciproque de f est aussi bijective, et $(f^{-1})^{-1} =$