

NOMBRES COMPLEXES.

Exercice 1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$a = i(2 - i), \quad b = (3 + i)(2 + 2i), \quad c = \frac{1}{1 + i}, \quad d = \frac{2 + i}{1 - 3i}$$

$$e = \frac{2 + 3i}{1 - i}, \quad f = \frac{1}{i + 3}, \quad g = \frac{1}{1 + 2i}$$

Exercice 2. Mettre sous forme algébrique (forme $a + ib$) puis exponentielle (forme $re^{i\theta}$) le nombre complexe :

$$Z = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}.$$

puis calculer Z^3 .

Exercice 3. Donner la forme exponentielle des complexes suivants :

$$a = 1 + i, \quad b = \sqrt{3} - i, \quad c = -3 - i\sqrt{3}, \quad d = -i, \quad e = -1, \quad f = 2i$$

Exercice 4. Donner la forme exponentielle des complexes suivants :

$$a = (\sqrt{3} + 3i)^4, \quad b = \frac{1}{(2 - 2i)^3}, \quad c = \frac{(\sqrt{3} + i)^2}{(1 + i)^3}.$$

Exercice 5. On considère les nombres complexes $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Déterminer la forme trigonométrique (exponentielle) de a , b , et de ab . Déterminer la forme algébrique de ab . En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 6. Soit $Z = 1 + i\sqrt{3}$. Déterminer la forme exponentielle (trigonométrique) de Z puis calculer Z^{2024} .

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1.$$

$$2 \cos x - 2 \sin x + \sqrt{6} = 0$$

Exercice 8. Déterminer le module et un argument de $z = 1 + e^{\frac{7i\pi}{6}}$

Exercice 9. On pose $z = -\sqrt{2\sqrt{3} - 3} + i\sqrt{2\sqrt{3} + 3}$. Calculer z^2 et en donner la forme trigonométrique. En déduire le module et un argument de z .

Exercice 10.

1. Soient z et z' deux complexes. Montrer que $z\bar{z}' - \bar{z}z'$ est un imaginaire pur.
2. Soit z un nombre complexe différent de 1. Montrer que si $|z| = 1$, alors $Z = i\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$
3. Soient deux complexes z_1 et z_2 tels que $z_1z_2 \neq -1$. Montrer que si $|z_1| = 1$ et $|z_2| = 1$, alors $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2} \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z - i| = |z + i|$ si, et seulement si, z est réel. Interpréter géométriquement.

Exercice 12. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, le nombre complexe $(2 + 3i)^n + (2 - 3i)^n$ est un nombre entier. (Indication : on pourra développer par la formule du binôme).

Exercice 13. Linéariser $\cos^6\theta$, $(\cos\theta)^4(\sin\theta)$, $(\cos\theta)^4(\sin\theta)^2$.

réponses :

$$\frac{1}{2^5} \left(\cos 6\theta + 6 \cos 4\theta + 15 \cos 2\theta + 10 \right), \quad \frac{1}{16} \left(2 \sin(\theta) + 3 \sin(3\theta) + \sin(5\theta) \right), \quad \frac{1}{32} \left(2 + \cos(2\theta) - 2 \cos(4\theta) - \cos(6\theta) \right)$$

(indication : utiliser les formules d'Euler : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Développer les puissances par la formule du binôme.)

Exercice 14. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos kx \quad \text{et} \quad S' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin kx.$$

(indication : on pourra calculer $S + iS'$)

Exercice 15. Montrer, pour tout $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) = 0.$$

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $x^2 + x + 1 = 0$ (donner les solutions sous forme trigonométrique),
2. $x^2 - 3x + 4 = 0$
3. $x^2 - 2x + 5 = 0$.
4. $x^2 - 2x + 4 = 0$. (donner les solutions sous forme trigonométrique)

Corrigé de l'exercice 8. Déterminer le module et un argument de $z = 1 + e^{\frac{7i\pi}{6}}$

On factorise par l'angle moitié :

$$\begin{aligned} 1 + e^{\frac{7i\pi}{6}} &= e^{\frac{7i\pi}{12}} \left(e^{-\frac{7i\pi}{12}} + e^{\frac{7i\pi}{12}} \right) \\ &= e^{\frac{7i\pi}{12}} 2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ d'après une formule d'Euler} \end{aligned}$$

On en déduit le module de z (le module d'un produit est le produit des modules) :

$$|z| = |e^{\frac{7i\pi}{12}} 2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)| = |e^{\frac{7i\pi}{12}}| \times |2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)|$$

Or $|e^{\frac{7i\pi}{12}}| = 1$ et $|2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)|$ est la valeur absolue de ce nombre réel.

Or $\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{12} < \pi$ et la fonction cosinus est strictement négative sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$, donc $2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < 0$. Donc

$$|2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)| = -2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right). \text{ Ainsi, } \boxed{|z| = -2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}.$$

Pour déterminer un argument de z (z étant différent de 0, ses arguments sont bien définis), on cherche un angle θ tel que $\frac{z}{|z|}$ s'écrive $e^{i\theta}$.

$$\frac{z}{|z|} = \frac{e^{\frac{7i\pi}{12}} 2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}{-2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = -e^{\frac{7i\pi}{12}}.$$

On a presque ce que l'on veut, mais il reste ce -1 devant l'exponentielle... Puisqu'on veut une exponentielle, l'idée est d'écrire -1 sous la forme d'une exponentielle : $-1 = e^{i\pi}$ ($-1 = e^{-i\pi}$ est possible aussi).

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\pi} e^{\frac{7i\pi}{12}} = e^{\frac{19i\pi}{12}}.$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\frac{19\pi}{12} \text{ est un argument de } z}.$$

Corrigé de l'exercice 9. On pose $z = -\sqrt{2\sqrt{3}-3} + i\sqrt{2\sqrt{3}+3}$. Calculer z^2 et en donner la forme trigonométrique. En déduire le module et un argument de z .

On développe en utilisant l'identité remarquable donnant le carré d'une somme, et le fait que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z^2 &= 2\sqrt{3} - 3 - (2\sqrt{3} + 3) - 2i \underbrace{\sqrt{2\sqrt{3}-3}\sqrt{2\sqrt{3}+3}}_{=\sqrt{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)}} = -6 - 2i\sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 3^2} = -6 - 2i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On trouve donc une expression très simple de z^2 (forme algébrique).

On cherche le module de z^2 en utilisant sa forme algébrique que l'on vient de calculer :

$$|z^2| = \sqrt{(-6)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} = \sqrt{3 \times 4^2} = 4\sqrt{3}.$$

On cherche maintenant un argument de z^2 : $\frac{z^2}{|z^2|} = \frac{-6 - 2i\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-\frac{5i\pi}{6}}$. Donc $-\frac{5i\pi}{6}$

est un argument de z^2 .

Ainsi, $z^2 = 4\sqrt{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ (c'est la forme trigonométrique de z^2).

Puis : $z \neq 0$ donc on peut l'écrire sous forme trigonométrique : $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On a $z^2 = r^2(e^{i\theta})^2 = r^2e^{i2\theta}$ d'après la formule de Moivre.

On utilise la forme trigonométrique de z^2 obtenue précédemment :

$r^2e^{i2\theta} = 4\sqrt{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}}$. Puis (proposition 10 du cours), nous sommes en présence de l'égalité de deux complexes écrits sous forme trigonométrique.

On en déduit :

$$\begin{cases} r^2 = 4\sqrt{3} \\ \exists k \in \mathbb{Z} : 2\theta = -\frac{5i\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} r = \sqrt{4\sqrt{3}} \text{ car } r > 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = -\frac{5i\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

Cela donne donc deux valeurs possibles pour z :

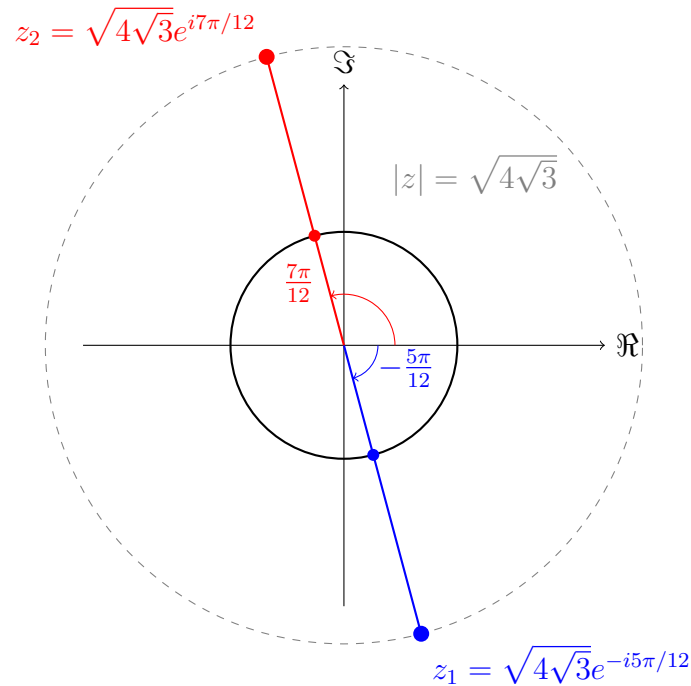
$$z = \sqrt{4\sqrt{3}}e^{i\frac{-5i\pi}{12}} \text{ ou } z = \sqrt{4\sqrt{3}}e^{i\frac{7i\pi}{12}}.$$

Nous allons éliminer une de ces deux valeurs en considérant la partie réelle de z :

$$\operatorname{Re}(z) = -\sqrt{2\sqrt{3}} - 3 < 0.$$

Or $\operatorname{Re}(\sqrt{4\sqrt{3}}e^{-i\frac{5i\pi}{12}}) = \sqrt{4\sqrt{3}}\cos(-\frac{5i\pi}{12}) = \sqrt{4\sqrt{3}}\cos(\frac{5i\pi}{12}) > 0$ car $0 < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$. Donc z ne peut pas valoir $\sqrt{4\sqrt{3}}e^{-i\frac{5i\pi}{12}}$.

On en déduit $z = \sqrt{4\sqrt{3}}e^{i\frac{7i\pi}{12}}$.



Corrigé de l'exercice 10.

1. Soient z et z' deux complexes. Montrer que $zz' - \bar{z}z'$ est un imaginaire pur.

RAPPEL : Z est imaginaire pur si, et seulement si, $\bar{Z} = -Z$.

Exprimons $\overline{zz' - \bar{z}z'}$.

$$\begin{aligned}\overline{zz' - \bar{z}z'} &= \overline{zz'} - \overline{\bar{z}z'} \\ &= \bar{z}\bar{z}' - \bar{\bar{z}}\bar{z}' \\ &= \bar{z}z' - z\bar{z}' \\ &= -(zz' - \bar{z}z')\end{aligned}$$

On en déduit que $zz' - \bar{z}z' \in i\mathbb{R}$.

2. Soit z un nombre complexe différent de 1. Montrer que si $|z| = 1$, alors $Z = i \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$

Première méthode (à privilégier)

On doit montrer : $|z| = 1 \implies i \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$

On suppose que $|z| = 1$.

RAPPEL : tout complexe de module 1 s'écrit $e^{i\theta}$, où θ est un réel (θ est un argument de z).
Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Donc $Z = i \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= \overline{i \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}} \\ &= \bar{i} \frac{\bar{1+e^{i\theta}}}{\bar{1-e^{i\theta}}} \text{ (conjugué d'un quotient, d'un produit)} \\ &= (-i) \frac{1+e^{-i\theta}}{1-e^{-i\theta}} \text{ (conjugué d'une somme et } \bar{i} = -i, \bar{1} = 1, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \text{)} \\ &= (-i) \frac{e^{-i\theta}(e^{i\theta} + 1)}{e^{-i\theta}(e^{i\theta} - 1)} \text{ on a factorisé num. et dénom. par } e^{-i\theta} \\ &= i \frac{e^{i\theta} + 1}{-(e^{i\theta} - 1)} \text{ on a fait passer le } -1 \text{ au dénominateur} \\ &= i \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\end{aligned}$$

Donc $\bar{Z} = Z$. On en déduit que $Z \in \mathbb{R}$.

Deuxième méthode

RAPPEL 1 : $Z \in \mathbb{R} \iff \bar{Z} = Z$.

RAPPEL 2 : Si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$ (voir cours, cela vient du fait que $|z|^2 = z\bar{z}$)

On suppose que $|z| = 1$.

Alors le complexe Z est bien défini car $1 - z \neq 0$.

Montrons que $Z \in \mathbb{R}$ en montrant que $\bar{Z} = Z$.

$$\begin{aligned}
\bar{Z} &= \overline{\left(i \frac{1+z}{1-z}\right)} \\
&= \overline{i} \frac{\overline{1+z}}{\overline{1-z}} \\
&= (-i) \frac{\bar{1} + \bar{z}}{\bar{1} - \bar{z}} \\
&= (-i) \frac{1 + \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} \text{ car } \bar{1} = 1 \text{ puisque } 1 \in \mathbb{R} \\
&= (-i) \frac{z+1}{z-1} \\
&= (-i) \frac{z+1}{-(1-z)} \\
&= i \frac{1+z}{1-z} \\
&= Z
\end{aligned}$$

Ainsi, $Z \in \mathbb{R}$.

3. Soient deux complexes z_1 et z_2 tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer que si $|z_1| = 1$ et $|z_2| = 1$, alors $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

On suppose que $|z_1| = 1$ et $|z_2| = 1$. Montrons que $Z \in \mathbb{R}$ en montrant que $\bar{Z} = Z$.

Puisque z_1 et z_2 sont de module 1, il existe deux réels a et b tels que $z_1 = e^{ia}$ et $z_2 = e^{ib}$.

RAPPEL : $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \bar{Z} &= \overline{\left(\frac{e^{ia} + e^{ib}}{1 + e^{ia}e^{ib}} \right)} \\
 &= \frac{\overline{e^{ia} + e^{ib}}}{\overline{1 + e^{ia}e^{ib}}} \\
 &= \frac{\overline{e^{ia}} + \overline{e^{ib}}}{\overline{1 + e^{ia}e^{ib}}} \\
 &= \frac{e^{-ia} + e^{-ib}}{1 + e^{-ia}e^{-ib}} \\
 &= \frac{e^{-ia}e^{-ib}(e^{ib} + e^{ia})}{e^{-ia}e^{-ib}(e^{ia}e^{ib} + 1)} \\
 &= \frac{e^{ib} + e^{ia}}{e^{ia}e^{ib} + 1}
 \end{aligned}$$

Donc $\bar{Z} = Z$. On en déduit que Z est réel.

Corrigé de l'exercice 14.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer : $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos kx$ et $S' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin kx$.

On pose $S_{\mathbb{C}} = S + iS'$.

Puisque S et S' sont réels, l'écriture ci-dessus est la forme algébrique de $S_{\mathbb{C}}$.
Donc $S = \operatorname{Re}(S_{\mathbb{C}})$ et $S' = \operatorname{Im}(S_{\mathbb{C}})$.

$$\begin{aligned}
 S_{\mathbb{C}} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \cos(kx) + i \binom{n}{k} \sin(kx) \right) \text{ par propriété de la } \sum \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(kx) + i \sin(kx)) \text{ on a factorisé par } \binom{n}{k} \text{ dans la } \sum \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} \text{ car } \cos(kx) + i \sin(kx) = e^{ikx} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k \text{ d'après la formule de Moivre} \\
 &= (1 + e^{ix})^n \text{ d'après la formule du binôme.}
 \end{aligned}$$

Il nous faut à présent déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de ce complexe.

Ce n'est pas une bonne idée de développer la puissance n par la formule du binôme (car on retrouverait la formule initiale : on tournerait en rond...).

On aimerait mieux avoir $(1 + e^{ix})$ sous forme factorisée (plus facile pour appliquer la puissance n).
C'est possible, en **factorisant par l'angle moitié** :

$1 + e^{ix} = e^{ix/2}(e^{-ix/2} + e^{ix/2}) = 2e^{ix/2} \cos(\frac{x}{2})$. Donc :

$$\begin{aligned}
 S_{\mathbb{C}} &= \left(2e^{ix/2} \cos(\frac{x}{2})\right)^n \\
 &= 2^n \left(e^{ix/2}\right)^n \left(\cos(\frac{x}{2})\right)^n \quad (\text{car } (abc)^n = a^n b^n c^n) \\
 &= 2^n \underbrace{\cos^n(\frac{x}{2})}_{\substack{\text{notation} \\ \text{f.de Moivre}}} \underbrace{e^{inx/2}}_{\substack{\text{notation} \\ \text{f.de Moivre}}} \\
 &= 2^n \cos^n(\frac{x}{2}) (\cos(nx/2) + i \sin(nx/2)) \\
 &= \underbrace{2^n \cos^n(\frac{x}{2}) \cos(nx/2)}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{2^n \cos^n(\frac{x}{2}) \sin(nx/2)}_{\in \mathbb{R}}
 \end{aligned}$$

On en déduit : $S = \operatorname{Re}(S_{\mathbb{C}}) = 2^n \cos^n(\frac{x}{2}) \cos(nx/2)$ et $S' = \operatorname{Im}(S_{\mathbb{C}}) = 2^n \cos^n(\frac{x}{2}) \sin(nx/2)$

Corrigé de l'exercice 15.

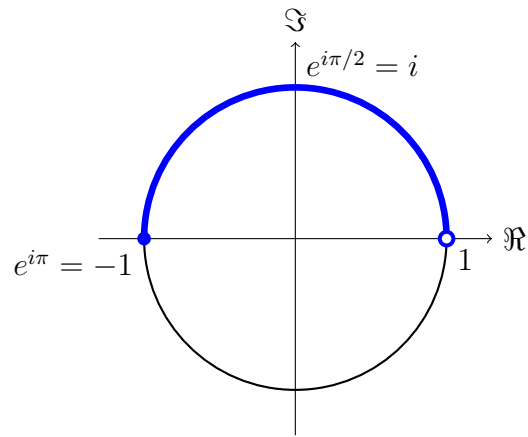
Montrer, pour tout $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.

Comme dans l'exercice précédent, on pose :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right), \quad S' = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad S_{\mathbb{C}} = S + iS'.$$

$$\begin{aligned}
 S_{\mathbb{C}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\theta} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\theta} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\theta} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k \quad (\text{formule de Moivre}) \\
 &= e^{i\theta} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right) \quad (\text{factorisation par } e^{i\theta})
 \end{aligned}$$

Nous sommes en présence de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
 $n \geq 2$ donc $0 < \frac{2\pi}{n} \leq \pi$, donc $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ est situé sur l'arc de cercle en bleu ci-dessous :



Donc $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$. Donc $S_{\mathbb{C}} = e^{i\theta} \frac{1 - (e^{\frac{2i\pi}{n}})^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}}$ d'après la formule de Moivre.

Or $e^{\frac{2in\pi}{n}} = e^{2i\pi} = 1$. Donc le numérateur de cette fraction est nul.

Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = 0$.

On en déduit : $\boxed{S = \operatorname{Re}(S_{\mathbb{C}}) = 0 \text{ et } S' = \operatorname{Im}(S_{\mathbb{C}}) = 0}$.